

A. DROZ

Note sur des formules de Joachimsthal

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 411-413

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__411_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR DES FORMULES DE JOACHIMSTHAL;

PAR M. A. DROZ.

Dans le *Journal de Crelle* (*Sur quelques applications des déterminants à la Géométrie*, t. XL), Joachimsthal a donné deux formules pour la surface du triangle dont on connaît les équations des trois côtés, et pour le volume du tétraèdre si l'on connaît de même les équations des quatre plans.

Mon intention dans cette Note est de donner une démonstration très simple de ces deux formules.

Soient

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(412)

Je représente par $\alpha_{\varphi\psi}$ le coefficient de $a_{\varphi\psi}$ dans le déterminant Δ .

On sait que

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^{n-1}$$

(BINET et CAUCHY, *Journal de l'Ecole Polytechnique*).

Expression de la surface S du triangle compris entre les trois droites

$$(1) \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$

$$(2) \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$

$$(3) \quad a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0.$$

Si $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ sont les coordonnées des points d'intersection des droites (23), (31), (12), on aura

$$x_1 = \frac{a_{11}}{a_{13}}, \quad y_1 = \frac{a_{12}}{a_{13}},$$

$$x_2 = \frac{a_{21}}{a_{23}}, \quad y_2 = \frac{a_{22}}{a_{23}},$$

$$x_3 = \frac{a_{31}}{a_{33}}, \quad y_3 = \frac{a_{32}}{a_{33}}.$$

Mais

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{13}a_{23}a_{33}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$(I) \quad 2S = \frac{\Delta^2}{a_{13}a_{23}a_{33}}.$$

Expression du volume V du tétraèdre compris entre

(413)

les quatre plans

$$(1) \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0,$$

$$(2) \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0,$$

$$(3) \quad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0,$$

$$(5) \quad a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0.$$

Soient $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4$ les coordonnées des points d'intersection des plans (234), (341), (412), (123); on aura

$$x_1 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{14}}, \quad y_1 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{14}}, \quad z_1 = \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{14}},$$

$$x_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{24}}, \quad y_2 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{24}}, \quad z_2 = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{24}},$$

$$x_3 = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{34}}, \quad y_3 = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{34}}, \quad z_3 = \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{34}},$$

$$x_4 = \frac{\alpha_{41}}{\alpha_{44}}, \quad y_4 = \frac{\alpha_{42}}{\alpha_{44}}, \quad z_4 = \frac{\alpha_{43}}{\alpha_{44}}.$$

Mais

$$6V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha_{14}\alpha_{24}\alpha_{34}\alpha_{44}} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}.$$

Donc

$$(II) \quad 6V = \frac{\Delta^3}{\alpha_{14}\alpha_{24}\alpha_{34}\alpha_{44}}.$$