

H. LAURENT

Réduction de deux polynômes homogènes du second degré à des sommes de carrés

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 38-48

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__38_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEGRÉ A DES SOMMES DE CARRÉS;

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Posons

(I)

les γ désignant dans ces formules des coefficients indéterminés et $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ de nouvelles variables. Les fonctions f, g se transformeront en des fonctions de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ données par les formules

$$f = \Sigma a_{ij} (\gamma_{i1} \gamma_1 + \gamma_{i2} \gamma_2 + \dots + \gamma_{in} \gamma_n) (\gamma_{j1} \gamma_1 + \dots + \gamma_{jn} \gamma_n),$$

$$g = \Sigma b_{ij} (\gamma_{i1} \gamma_1 - \gamma_{i2} \gamma_2 + \dots - \gamma_{in} \gamma_n) (\gamma_{j1} \gamma_1 + \gamma_{jn} \dots - \gamma_n),$$

que l'on peut aussi écrire

$$f = \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu, \quad g = \Sigma b_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu,$$

de sorte que, si l'on pose

$$(2) \quad \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = 0,$$

$$(3) \quad \Sigma b_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = 0,$$

$$(4) \quad \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\mu} = A_\mu,$$

$$(5) \quad \Sigma b_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\mu} = B_\mu,$$

μ et ν étant supposés fixes sous le signe Σ , on aura simplement

$$f = A_1 \gamma_1^2 + A_2 \gamma_2^2 + \dots + A_n \gamma_n^2,$$

$$g = B_1 \gamma_1^2 + B_2 \gamma_2^2 + \dots + B_n \gamma_n^2.$$

Si l'on parvient à résoudre les équations (2) et (3) par rapport aux γ_{ij} , les fonctions f et g pourront être ramenées à des sommes de carrés au moyen du changement de variables représenté par les équations (1). Pour résoudre ces équations, nous procéderons comme il suit : soient $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la demi-dérivée de f relative à x_i , et g_i la demi-dérivée de g relative à la même variable; les équations (2) et (3) peuvent s'écrire respectivement:

$$(2 \text{ bis}) \quad \gamma_{1\mu} f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots, \gamma_{n\nu}) + \gamma_{2\mu} f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots, \gamma_{n\nu}) + \dots = 0,$$

$$(3 \text{ bis}) \quad \gamma_{1\mu} g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots, \gamma_{n\nu}) + \gamma_{2\mu} g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots, \gamma_{n\nu}) + \dots = 0;$$

et, comme elles ont lieu pour $\mu = 1, 2, 3, \dots, n$, il faut en

conclure

$$\frac{f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)}{g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)} = \frac{f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)}{g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)} = \dots,$$

pour toutes les valeurs $1, 2, 3, \dots, n$ de ν . Égalons ces rapports à une nouvelle indéterminée λ_ν , nous aurons

$$(6) \quad \begin{cases} f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) - \lambda_\nu g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) = 0, \\ f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) - \lambda_\nu g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Ces équations détermineront les quantités γ qui portent le second indice ν . Effaçons, pour simplifier, cet indice; on pourra les écrire comme il suit, en remplaçant $f_1, f_2, \dots, g_1, g_2, \dots$ par leurs développements :

$$(7) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda b_{11})\gamma_1 \\ \quad + (a_{12} - \lambda b_{12})\gamma_2 + \dots + (a_{1n} - \lambda b_{1n})\gamma_n = 0, \\ \dots \dots \dots \\ (a_{n1} - \lambda b_{n1})\gamma_1 \\ \quad + (a_{n2} - \lambda b_{n2})\gamma_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda b_{nn})\gamma_n = 0. \end{cases}$$

Commençons par éliminer $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$; nous aurons l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré en λ

$$(8) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \dots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Sil'on appelle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les racines de cette équation et si, dans les formules (7), on remplace successivement λ par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, elles feront connaître les valeurs des rapports $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 : \dots$; si l'on se donne $B_1, B_2, \dots, B_n$, les formules (4) achèveront de déterminer les γ_{ij} .

Multiplions alors la première formule (7) par γ_1 , la seconde par γ_2 , etc., et ajoutons, nous aurons

$$\Sigma a_{ij} \gamma_i \gamma_j = \lambda \Sigma b_{ij} \gamma_i \gamma_j;$$

donc

$$A_{\mu} = \lambda_{\mu} B_{\mu},$$

de sorte que

$$(9) \quad g = B_1 y_1^2 - B_2 y_2^2 + \dots + B_n y_n^2,$$

$$(10) \quad f = B_1 \lambda_1 y_1^2 + B_2 \lambda_2 y_2^2 + \dots + B_n \lambda_n y_n^2;$$

f et g sont ainsi ramenés à des sommes de carrés par une même substitution linéaire.

Mais, pour que les calculs que nous venons d'esquisser conduisent à un résultat admissible, il faut : 1° que l'équation en λ ait effectivement n racines; 2° que les équations (7) soient compatibles; 3° que l'on puisse effectivement choisir arbitrairement $B_1, B_2, \dots$, c'est-à-dire que les $g(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ ne soient pas identiquement nuls; 4° que la substitution (1) soit réversible, c'est-à-dire que les y puissent se calculer en fonction des x , c'est-à-dire que les fonctions transformées (9) et (10) soient comme les proposées des fonctions de n variables, ce que nous supposerons; cela revient à admettre que les fonctions f et g ont des discriminants différents de zéro, et nous l'admettrons effectivement jusqu'à nouvel ordre.

DÉMONSTRATION D'UN LEMME.

Si l'équation $\Lambda = 0$ admet pour racine simple la quantité λ , les mineurs de Λ ne seront pas tous nuls et la quantité $g(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ sera différente de zéro; si, au contraire, les mineurs de Λ n'étant pas tous nuls, $\Lambda = 0$ admet λ pour racine double, on aura nécessairement $g(\gamma_1, \gamma_2, \dots) = 0$.

D'abord, si les mineurs de Λ sont tous nuls, comme

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} = - \sum \frac{d\Lambda}{da_{ij}} b_{ij},$$

$\frac{d\Lambda}{d\lambda}$ sera nul et $\Lambda = 0$ aura λ pour racine double au moins.

Si tous les mineurs de Λ ne sont pas nuls, on a, en

vertu des équations (7),

$$\gamma_p \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_i \frac{d\Lambda}{da_{pj}},$$

$$\gamma_q \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{qi}},$$

et par suite

$$(12) \quad \gamma_p \gamma_q \left(\frac{d\Lambda}{da_{ij}} \right)^2 = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{qi}} = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{iq}}.$$

Or on a, en vertu d'un théorème connu,

$$\Lambda \frac{d^2 \Lambda}{da_{pj} da_{iq}} = \frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{iq}} - \frac{d\Lambda}{da_{pq}} \frac{d\Lambda}{da_{ij}},$$

et, comme $\Lambda = 0$,

$$\frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{iq}} = \frac{d\Lambda}{da_{pq}} \frac{d\Lambda}{da_{ij}}.$$

L'équation (12) devient alors

$$\gamma_p \gamma_q \left(\frac{d\Lambda}{da_{ij}} \right)^2 = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{ij}} \frac{d\Lambda}{da_{pq}};$$

or, puisque tous les mineurs de Λ ne sont pas nuls, on

peut supposer $\frac{d\Lambda}{da_{ij}} \neq 0$, et alors on a

$$\gamma_p \gamma_q \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pq}};$$

on en conclut

$$\frac{d\Lambda}{da_{ij}} \sum b_{pq} \gamma_p \gamma_q = \gamma_i \gamma_j \sum \frac{d\Lambda}{da_{pq}} b_{pq}$$

ou bien

$$(13) \quad \frac{d\Lambda}{da_{ij}} g = - \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{d\lambda}.$$

Donc g ne s'annule que si $\frac{d\Lambda}{d\lambda}$, γ_i ou γ_j sont nuls. Donc enfin, si la racine λ n'est pas racine double de $\Lambda = 0$, g ne s'annulera que si γ_i ou γ_j sont nuls. Supposons $\gamma_i = 0$; le système (7) se réduit en supprimant la $j^{\text{ième}}$

ligne à un système de $n - 1$ équations homogènes à $n - 1$ inconnues dont le déterminant n'est pas nul, car il est égal à $\frac{d\Lambda}{da_{ij}}$. Donc il faut que $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ soient tous nuls, ce qui est absurde, puisque $\Lambda = 0$; donc γ_i ne saurait être nul, donc γ_j pour la même raison ne l'est pas non plus; donc enfin, si λ n'est pas racine multiple de $\Lambda = 0$, g ne saurait être nul.

Ces conclusions tombent en défaut quand tous les mineurs de Λ s'annulent. Pour discuter ce cas spécial, imaginons que les coefficients a_{kl} de la fonction f deviennent variables et que, pour des valeurs particulières de ces coefficients, les mineurs de Λ s'annulent sans que les mineurs du second ordre passent tous par zéro. Différentions l'équation (13); on aura, en observant que g ne contient pas les a_{kl} ,

$$g \sum \frac{d^2 \Lambda}{da_{ij} da_{kl}} \delta a_{kl} = -\gamma_i \gamma_j \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} \delta \lambda - \frac{d\Lambda}{d\lambda} \delta(\gamma_i \gamma_j).$$

Si $\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2}$ n'est pas nul, cette formule devient, en supposant $\frac{d\Lambda}{d\lambda} = 0$,

$$(14) \quad g \sum \frac{d^2 \Lambda}{da_{ij} da_{kl}} \delta a_{kl} = -\gamma_i \gamma_j \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} \delta \lambda.$$

Il est facile de prouver que $\delta \lambda$ n'est pas nul, il en résultera que g ne peut s'annuler que si $\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = 0$, c'est-à-dire que si λ est racine triple de $\Lambda = 0$. En effet, en différentiant $\Lambda = 0$, on a

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} \delta \lambda + \sum \frac{d\Lambda}{da_{kl}} \delta a_{kl} = 0.$$

Comme $\frac{d\Lambda}{d\lambda} = 0$, $\frac{d\Lambda}{da_{kl}} = 0$. Différentions encore; nous

aurons

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} \hat{\partial}^2 \lambda + \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} \hat{\partial} \lambda^2 + 2 \sum \frac{d}{d\lambda} \frac{d\Lambda}{da_{kl}} \hat{\partial} \lambda \hat{\partial} a_{kl} - \sum \frac{d^2 \Lambda}{da_{kl} da_{ij}} \hat{\partial} a_{kl} \hat{\partial} a_{ij} = 0,$$

formule qui se réduit, dans nos hypothèses, à

$$\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} \hat{\partial} \lambda^2 + 2 \hat{\partial} \lambda \sum \frac{d}{d\lambda} \frac{d\Lambda}{da_{kl}} \hat{\partial} a_{kl} - \sum \frac{d^2 \Lambda}{da_{kl} da_{ij}} \hat{\partial} a_{kl} \hat{\partial} a_{ij} = 0.$$

On voit que $\hat{\partial} \lambda$ non seulement n'est pas nul, mais en général a deux valeurs si $\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2}$ n'est pas nul; quant à $\sum \frac{d^2 \Lambda}{da_{ij} da_{kl}} \hat{\partial} a_{kl}$, il est différent de zéro pour des valeurs convenables des $\hat{\partial} a_{kl}$, si tous les mineurs du second ordre de Λ ne sont pas nuls, comme on l'a supposé.

La formule (14) montre que, si $\Lambda = 0$ a une racine triple sans que tous les mineurs du second ordre de $\Lambda = 0$ soient nuls, g sera nul. Le cas où tous ces mineurs seraient nuls se traitera en différenciant (14) avec la caractéristique $\hat{\partial}$, et ainsi de suite.

DISCUSSION DES RÉSULTATS.

Supposons que l'équation Λ n'ait que des racines simples finies et différentes de zéro. Les équations (7) donneront pour chaque valeur de λ des valeurs bien déterminées de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$. Les mineurs de Λ n'étant pas tous nuls et $\frac{d\Lambda}{d\lambda}$ étant finis, $B_1, B_2, \dots$ pourront être choisis différents de zéro, et la substitution (1) aura tous ses coefficients bien déterminés; j'ajoute qu'elle sera réversible, c'est-à-dire que son déterminant Γ sera dif-

férent de zéro, c'est-à-dire que les γ seront des fonctions des x . En effet, en vertu de (3 bis) et de (4), on a

$$\Gamma \begin{vmatrix} g_1(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1n}) & g_2(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1n}) \dots \\ g_1(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{2n}) & g_2(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{2n}) \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = B_1 B_2 \dots B_n;$$

mais, $B_1, B_2, \dots$ étant différents de zéro, il faut que Γ lui-même soit différent de zéro. c. q. f. d.

Je suppose que λ soit racine double de $\Lambda = 0$. En général, la réduction de f et g à des sommes de carrés ne pourra plus se faire parce que, $g = B$ étant nul, Γ l'est aussi; pour parler plus exactement, la réduction à une somme de carrés est encore possible, mais la transformation (1) n'est pas réversible et elle altère la nature des fonctions f et g .

Cependant, si tous les mineurs de $\Lambda = 0$ étaient nuls, $g = B$ ne serait plus forcément nul et la transformation, loin de ne plus être possible, pourrait s'effectuer d'une infinité de manières, puisque les équations (7), se réduisant à $n - 2$ distinctes, fourniraient une infinité de systèmes admissibles pour les quantités $\gamma_1 : \gamma_2 : \dots$. La valeur λ double étant connue, on pourra disposer de ces systèmes de manière à satisfaire à (2) et (3).

Si l'équation $\Lambda = 0$ avait une racine triple, la réduction à des sommes de carrés redeviendrait impossible, à moins que tous les mineurs du troisième ordre de Λ ne fussent nuls, et ainsi de suite.

Maintenant supposons que l'équation $\Lambda = 0$ ait une racine nulle; f aura son discriminant nul et sera une fonction de $n - 1$ variables seulement, de sorte qu'un carré devra disparaître de l'expression de f . C'est ce qui aura lieu par l'application de la méthode expliquée plus haut. Le cas où $\Lambda = 0$ aurait une racine infinie sans avoir de racine nulle pourra être évité en considérant la fonc-

tion $g - \lambda f$ à la place de $f - \lambda g$. Enfin le cas où $\Lambda = 0$ aurait à la fois une racine nulle et une racine infinie sera le seul qui échappera à notre méthode; mais, dans ce cas, f et g sont tous deux des fonctions de $n - 1$ variables au plus et c'est alors sur ces variables réduites à leur minimum qu'il conviendra d'appliquer la méthode exposée.

En résumé :

Étant donnés deux polynômes homogènes du second degré f et g à n variables, on pourra toujours les transformer en des sommes de carrés au moyen d'une substitution linéaire réversible, à la condition que le discriminant de $f - \lambda g$, égalé à zéro, n'ait que des racines simples, ou que, s'il a des racines multiples, à chaque racine d'ordre m correspondent des mineurs d'ordre $m - 1$, du discriminant de $f - \lambda g$, tous nuls.

Maintenant considérons les formes réduites de f et g , et supposons les coefficients de ces deux fonctions réels; l'équation $\Lambda = 0$ n'aura pas en général toutes ses racines réelles, de sorte que, l'une des formes réduites étant à coefficients réels, l'autre ne sera pas nécessairement à coefficients réels; la substitution (1) elle-même pourra fort bien n'être pas réelle. Il importe cependant de discerner les cas dans lesquels on aura affaire à des substitutions réelles; or la forme particulière de la fonction Λ permet de compter *a priori* et assez facilement le nombre des racines réelles de $\Lambda = 0$. On a, en effet,

$$\Lambda \frac{d^2 \Lambda}{da_{nn} da_{n-1,n-1}} - \frac{d\Lambda}{da_{nn}} \frac{d\Lambda}{da_{n-1,n-1}} - \left(\frac{d\Lambda}{da_{n-1,n}} \right)^2,$$

ou, en appelant Λ_1 ce que devient Λ quand on supprime la dernière ligne et la dernière colonne, Λ_2 ce qu'il

devient quand on supprime les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes, etc.,

$$\Lambda \Lambda_2 = \Lambda_1 \frac{d\Lambda}{da_{n-1, n-1}} - \left(\frac{d\Lambda}{da_{n-1, n}} \right)^2.$$

On aurait des relations analogues entre $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, entre $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$, etc., et l'on voit que, si Λ_1 s'annule, Λ et Λ_2 seront de signes contraires. En général, si Λ_i s'annule, Λ_{i+1} et Λ_{i-1} seront de signes contraires. Cette règle n'est malheureusement pas sans exception, et, Λ_1 s'annulant

si $\frac{d\Lambda}{da_{n, n-1}}$ est nul, on voit que Λ ou Λ_2 s'annulera aussi.

Quoi qu'il en soit, les cas où la remarque faite tomberait en défaut seront exceptionnels, et quand $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ seront tels que pour $\lambda = +\infty$ et $-\infty$ ils ne présentent que des variations dans un cas, et que des permanences dans l'autre, $\Lambda = 0$ aura toutes ses racines réelles.

L'équation $\Lambda = 0$ aura toutes ses racines réelles lorsque l'une des fonctions f, g sera une somme de carrés tous positifs ou tous négatifs. En effet, les racines de $\Lambda = 0$ ne changent pas par une substitution orthogonale ramenant f seul à une somme de carrés

$$\Lambda_1 x_1^2 + \Lambda_2 x_2^2 + \dots + \Lambda_n x_n^2.$$

Tous ces carrés étant censés positifs, on peut faire la sub-

stitution $x_1 = \frac{y}{\sqrt{\Lambda_1}}, x_2 = \frac{y}{\sqrt{\Lambda_2}}, \dots$; alors la substitution

qui ramènera à la fois f et g à des sommes de carrés aura pour équation $\Lambda = 0$ une équation de la forme

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle a, comme l'on sait, toutes ses racines réelles.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

Pour faire une application géométrique des principes précédents, supposons que $f = 0$ et $g = 0$ représentent deux surfaces du second ordre ; les coefficients de f et g seront supposés réels. Dire que l'on peut ramener f et g à des sommes de carrés par une même substitution linéaire, c'est dire que deux surfaces du second ordre ont un tétraèdre autopolaire commun. Les théorèmes établis plus haut s'interprètent donc ainsi :

Deux surfaces du second ordre qui ne se touchent pas, car alors on n'a pas à la fois

$$f = 0, \quad g = 0, \quad \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \dots = \lambda,$$

ont toujours un tétraèdre autopolaire commun.

Deux surfaces du second ordre qui se touchent en un seul point n'ont pas de tétraèdre autopolaire commun.

Deux surfaces du second ordre qui ont un double contact ont une infinité de tétraèdres autopolaires communs.

Deux surfaces circonscrites n'ont pas de tétraèdres autopolaires communs.