

E. FAUQUEMBERGUE

**Solution d'une question de licence
(faculté de Paris, 1875)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 35-38

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__35_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE

(FACULTÉ DE PARIS, 1875);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,

Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Déterminer une courbe (c) telle que si l'on forme une de ses transformées (C) par rayons vecteurs réciproques relativement à un pôle donné O, les rayons de courbure en deux points correspondants m et M des deux courbes (c) et (C) soient dans un rapport donné.

Donnons d'abord une expression simple du rayon de courbure. On a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta + dV},$$

α étant l'angle de la tangente avec l'axe polaire et V l'angle formé par la tangente avec le rayon vecteur; mais

$$\cos V = \frac{dr}{ds}, \quad \sin V = \frac{r d\theta}{ds},$$

d'où, en éliminant ds et $d\theta$,

$$\rho = \frac{dr}{\cos V d\theta + \cos V dV} = \frac{r dr}{\sin V dr + r \cos V dV} = \frac{r dr}{d.r \sin V}.$$

Cette expression, ou encore, en appelant p la distance de la tangente à l'origine, $\rho = \frac{r dr}{dp}$, est celle que nous voulions obtenir.

Si l'on désigne par K le rapport des rayons de courbure aux points $m(r, \theta)$, $M(R, \theta)$, l'équation de condition sera

$$(1) \quad \frac{r dr}{d.r \sin V} = \frac{KR dR}{d.R \sin V},$$

en remarquant que les angles V en ces deux points sont supplémentaires.

On a d'ailleurs, par définition,

$$Rr = a^2,$$

d'où

$$R = \frac{a^2}{r}, \quad dR = -\frac{a^2}{r^2} dr.$$

Substituant dans l'équation (1), elle devient

$$\frac{r dr}{d.r \sin V} = -\frac{K a^4 dr}{r^3 d.\frac{a^2}{r} \sin V}.$$

On tire de là

$$\frac{d.\sin V}{\sin V} = \frac{r^2 - K a^2}{r(r^2 + K a^2)} dr = -\frac{dr}{r} + \frac{2r dr}{r^2 + K a^2},$$

et, en intégrant,

$$\log \sin V = -\log r + \log C(r^2 + K a^2)$$

ou

$$\sin V = \frac{C(r^2 + K a^2)}{r}.$$

Égalant cette valeur de $\sin V$ à celle $\frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}}$ donnée plus haut, on aura l'équation différentielle de la courbe,

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}} = \frac{C(r^2 + K a^2)}{r};$$

d'où

$$(2) \quad \frac{1}{C} d\theta = \frac{(r^2 + K a^2) dr}{r \sqrt{r^2 - C^2(r^2 + K a^2)^2}},$$

$$\frac{1}{C} d\theta = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - C^2(r^2 + K a^2)^2}} + K a^2 \frac{dr}{r \sqrt{r^2 - C^2(r^2 + K a^2)^2}}.$$

Le premier terme du second membre peut s'écrire

$$\frac{d.(r^2)}{2C \sqrt{-K^2 a^4 + \left(\frac{1}{C^2} - 2K a^2\right)(r^2) - (r^2)^2}};$$

l'intégrale est

$$\frac{1}{2C} \arccos \frac{1 - 2KC^2 a^2 - 2C^2 r^2}{\sqrt{1 - 4KC^2 a^2}}.$$

Le second terme peut se mettre sous une forme analogue, après avoir divisé haut et bas par r^3 :

$$- \frac{1}{2C} \frac{d(r^{-2})}{\sqrt{-\frac{1}{K^2 a^4} + \frac{1}{K^2 a^2} \left(\frac{1}{C^2} - 2K a^2\right)(r^{-2}) - (r^{-2})^2}}.$$

On trouve, pour l'intégrale,

$$- \frac{1}{2C} \arccos \frac{1 - 2KC^2 a^2 - 2K^2 a^4 C^2 r^{-2}}{\sqrt{1 - 4K a^2 C^2}}.$$

(38)

On aura donc, pour l'intégrale de l'équation (2),

$$2(\theta - \theta_0) = \arccos \frac{1 - 2KC^2a^2 - 2C^2r^2}{\sqrt{1 - 4Ka^2C^2}} \\ - \arccos \frac{1 - 2KC^2a^2 - 2K^2a^4C^2r^{-2}}{\sqrt{1 - 4Ka^2C^2}},$$

θ_0 étant la constante d'intégration.

En prenant les cosinus des deux membres, on trouve, après des transformations connues,

$$\cos 2(\theta - \theta_0) = \frac{-2K^2a^4C^2 + r^2 - 2C^2r^4}{(1 - 4Ka^2C^2)r^2}$$

ou

$$C^2r^4 - [\sin^2(\theta - \theta_0) + 2Ka^2C^2 \cos 2(\theta - \theta_0)]r^2 + K^2a^4C^2 = 0.$$

Telle est l'équation de la courbe demandée.