NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. JAMET

# Sur une classe de surfaces du quatrième ordre

*Nouvelles annales de mathématiques 2^e série*, tome 20 (1881), p. 344-348

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__344_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# SUR UNE CLASSE DE SURFACES DU QUATRIEME ORDRE;

PAR M. V. JAMET,
Professeur au lycée de Nice

I. Dans un travail récemment publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, M. Amigues a étudié une classe de surfaces qu'il a désignées sous le nom de *giroïdes*. Ces surfaces, engendrées par des cercles passant par deux points fixes, admettent ces cercles pour lignes de courbure de la première série, et pour lignes

de courbure de la seconde série, des courbes sphériques. Elles peuvent, en outre, être considérées comme des enveloppes de sphères passant par deux points fixes, et dont le centre se meut sur une courbe plane dont le plan est perpendiculaire à la ligne qui joint les deux points fixes et passe par son milieu. Ce sont ces surfaces que l'on obtient en transformant les surfaces coniques par rayons vecteurs réciproques.

Parmi ces surfaces, M. Amigues considère en particulier celles du quatrième ordre, et montre qu'on obtient de pareilles surfaces quand on cherche l'enveloppe d'une sphère dont le centre se meut sur une conique et qui passe par deux points fixes symétriques par rapport au plan de cette conique. Ces surfaces correspondent aux cônes du second ordre. Je me propose, dans ce travail, de déduire des propriétés des cônes du second ordre quelques propriétés des girocyclides du quatrième ordre.

II. Vérifions d'abord qu'à toute girocyclide correspond un cône. Prenons pour axe des $z$ la droite qui joint les deux points fixes (réels ou imaginaires conjugués) par lesquels passent les lignes de courbure de la première série, et pour plan des $xy$ le plan mené perpendiculairement à cette droite par le milieu de la distance des deux points. Soit $2c$ la demi-distance de ces points; $c$ peut être de la forme $\alpha\sqrt{-1}$, mais $c^2$ est toujours une quantité réelle.

Soient les deux sphères

$$x^2+y^2+z^2-2mx-2ny-c^2=0 \qquad (1)$$

et

$$x^2+y^2+z^2-2m'x-2n'y-c^2=0; \qquad (2)$$

lorsque $m$, $n$, $m'$, $n'$ varient d'après une loi donnée, l'intersection de ces deux sphères engendre la girocyclide. Changeons, dans ces équations,

$$x \quad \text{en} \quad \frac{k^2\xi}{\xi^2+\tau_1^2+(\zeta-c)^2},$$

$$y \quad \text{en} \quad \frac{k^2\tau_1}{\xi^2+\tau_1^2+(\zeta-c)^2},$$

$$z \quad \text{en} \quad c+\frac{k^2(\zeta-c)}{\xi^2+\tau_1^2+(\zeta-c)^2};$$

elles deviennent

$$(3) \qquad k^2-2m\xi-2n\tau_1+2c(\zeta-c)=0,$$

et

$$(4) \qquad k^2-2m'\xi-2n'\tau_1+2c(\zeta-c)=0.$$

Si, dans ces équations, on considère $\xi$, $\tau_1$, $\zeta$ comme des coordonnées courantes, elles représentent deux plans passant par le point $\left(\xi=0,\ \tau_1=0,\ \zeta=\frac{2c^2-k^2}{2c}\right)$, et, lorsque $m$, $n$, $m'$, $n'$ varient d'après une loi donnée, leur intersection décrit un cône (réel ou imaginaire).

Réciproquement, si dans les équations (3) et (4) on change

$$\xi \quad \text{en} \quad \frac{k^2x}{x^2+y^2+(z-c)^2},$$

$$\tau_1 \quad \text{en} \quad \frac{k^2y}{x^2+y^2+(z-c)^2},$$

$$\zeta \quad \text{en} \quad c-\frac{k^2(z-c)}{x^2+y^2+(z-c)^2},$$

on retombe sur les équations (1) et (2).

Donc, à toute girocyclide correspond un cône, et réciproquement. Les génératrices du cône correspondent aux cercles générateurs de la girocyclide.

Remarquons en outre que, quel que soit $k$, pour une

même détermination de $m$, $n$, $m'$, $n'$, toutes les droites représentées par les équations (3) et (4) ont la même direction. Donc tous les cônes transformés sont égaux. En particulier, ils sont égaux au cône tangent à la surface au point singulier dont les coordonnées sont o, o et $c$, car, pour $k = 0$, les équations (3) et (4) représentent les plans tangents aux sphères (1) et (2) en ce point.

Ils sont, de plus, symétriques du cône tangent au point $(0, 0, -c)$, par rapport à un plan parallèle au plan des $xy$.

III. Voyons maintenant à quoi correspondent les lignes de courbure de la deuxième série. D'après un théorème connu, ce sont les transformées des lignes de courbure de la deuxième série du cône, et celles-ci sont les intersections du cône avec des sphères de rayon arbitraire, ayant pour centre le sommet du cône. Il est facile de le vérifier analytiquement.

D'après un théorème démontré par M. Amigues, les lignes de courbure de la deuxième série sont situées sur des sphères dont l'équation générale est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hz + c^2 = 0,$$

$h$ étant un paramètre arbitraire.

Cette équation peut s'écrire

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 + 2(c - h)(z - c) + 2c(c - h) = 0.$$

Si l'on y fait la transformation indiquée, il vient

$$k^4 + 2k^2(c - h)(\zeta - c) + 2c(c - h)[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - c)^2] = 0.$$

Si $h$ varie, cette équation représentera une série de sphères dont le centre sera sur l'axe des $z$, et à une distance de l'origine égale à $\frac{2c^2 - k^2}{2c}$; ce sont bien les sphères définies précédemment.

IV. Une girocyclide du quatrième ordre, rapportée, comme l'a fait M. Amigues, au centre et aux axes de la conique que décrit le centre de la sphère enveloppée, a pour équation

$$(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2)^2=4\mathrm{A}(x-a)^2+4\mathrm{B}(y-b)^2$$

ou bien

$$[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+2a(x-a)+2b(y-b)+2c(z-c)]^2 = 4\mathrm{A}(x-a)^2+4\mathrm{B}(y-b)^2.$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point $(a, b, o)$, cette équation devient

$$[x^2+y^2+(z-c)^2+2ax+2by+2c(z-c)]^2 = 4\mathrm{A}x^2+4\mathrm{B}y^2,$$

et, si l'on effectue sur cette dernière équation la transformation indiquée, il vient

$$[k^2+2a\xi+2b\eta+2c(\zeta-c)]^2=4\mathrm{A}\xi^2+4\mathrm{B}\eta^2,$$

équation qui représente un cône du second ordre.

(*A suivre.*)