

H. FAURE

Sur l'expression du volume de certains tétraèdres

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 338-344

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20_338_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'EXPRESSION DU VOLUME DE CERTAINS TÉTRAÈDRES;

PAR M. H. FAURE,
Chef d'escadron d'Artillerie.

1. Si l'on désigne par $a, b, c, d; a', b', c', d'$ les sommets de deux tétraèdres, on a la relation suivante :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'bcd & a'cda & a'dab & a'abc \\ b'bcd & b'cda & b'dab & b'abc \\ c'bcd & c'cda & c'dab & c'abc \\ d'bcd & d'cda & d'dab & d'abc \end{vmatrix} = (abcd)^3 \cdot a'b'c'd',$$

entre les volumes des divers tétraèdres que l'on peut former en joignant les sommets du premier à ceux du second.

Ce théorème, que j'avais proposé en question, a été démontré dans ce Journal.

II. Supposons qu'il existe entre les volumes de ces tétraèdres les relations

$$\begin{aligned}\frac{a'bcd}{l} &= \frac{a'cda}{m} = \frac{a'dab}{n} = \frac{a'abc}{p}, \\ \frac{b'bcd}{l'} &= \frac{b'cda}{m'} = \frac{b'dab}{n'} = \frac{b'abc}{p'}, \\ \frac{c'bcd}{l''} &= \frac{c'cda}{m''} = \frac{c'dab}{n''} = \frac{c'abc}{p''}, \\ \frac{d'bcd}{l'''} &= \frac{d'cda}{m'''} = \frac{d'dab}{n'''} = \frac{d'abc}{p'''}. \end{aligned}$$

De la première nous déduisons

$$\frac{a'bcd}{l} = \frac{a'cda}{m} = \frac{a'dab}{n} = \frac{a'abc}{p} = \frac{abcd}{l+m+n+p}.$$

Les trois autres donnent des résultats analogues, de sorte que, si dans le déterminant Δ nous remplaçons tous les volumes par leurs valeurs en fonction de $abcd$ et des coefficients $l, m, n, \dots$, nous trouverons, en représentant par P, P', P'', P''' les sommes $l+m+n+p, \dots$,

$$\begin{vmatrix} l & m & n & p \\ l' & m' & n' & p' \\ l'' & m'' & n'' & p'' \\ l''' & m''' & n''' & p''' \end{vmatrix} \frac{abcd}{P \cdot P' \cdot P'' \cdot P'''} = a'b'c'd'.$$

Les quantités $l, m, n, p, \dots$ sont susceptibles de signes, car on doit avoir en même temps

$$\begin{aligned}a'bcd + a'cda + a'dab + a'abc &= abcd, \\ l + m + n + p &= P. \end{aligned}$$

Si les points a', b', c', d' sont sur les faces A, B, C, D, on a, dans l'espace, le théorème correspondant à la question 1353.

III. Supposons que les points a', b', c', d' soient pris respectivement sur les faces A, B, C, D du tétraèdre $abcd$. Nous aurons

$$\begin{aligned} a'bcd &= 0, & a'cda &= \frac{a'cd(a, \Lambda)}{3}, \\ a'dab &= \frac{a'db(a, \Lambda)}{3}, & a'abc &= \frac{a'bc(a, \Lambda)}{3}, \end{aligned}$$

et des expressions analogues pour les autres éléments du déterminant Δ . Notre premier théorème devient donc celui-ci :

Un tétraèdre $abcd$ étant donné, si l'on prend sur ses faces les points a', b', c', d' et que l'on désigne par A, B, C, D les aires des faces de ce tétraèdre, on aura

$$\begin{vmatrix} 0 & a'cd & a'db & a'bc \\ b'cd & 0 & b'da & b'ac \\ c'bd & c'da & 0 & c'ab \\ d'bc & d'ca & d'ab & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a'b'c'd'}{abcd} \text{ A.B.C.D.}$$

Si, en particulier, les points a', b', c', d' sont les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du tétraèdre $abcd$ sur ses faces, les triangles qui figurent dans le déterminant sont les projections de trois des faces sur la quatrième, et l'on obtient le résultat indiqué par M. Genty (question 1353).

IV. Joignons un point quelconque o aux sommets a, b, c, d et prenons sur ces droites respectivement les points a', b', c', d' . Ces points formeront un tétraèdre $a'b'c'd'$, homologique au tétraèdre $abcd$. Si l'on désigne par V' le volume de ce tétraèdre, par V_a, V_b, V_c, V_d les

volumes des tétraèdres qui ont pour sommet commun le point o , et pour bases les faces A, B, C, D du tétraèdre $abcd$, on a la relation

$$(1) \quad V' = \frac{oa' \cdot ob' \cdot oc' \cdot od'}{oa \cdot ob \cdot oc \cdot od} \left(\frac{oa}{oa'} V_a - \frac{ob}{ob'} V_b + \frac{oc}{oc'} V_c + \frac{od}{od'} V_d \right).$$

En effet, si l'on désigne par V'_a, V'_b, V'_c, V'_d les volumes des tétraèdres ayant pour sommet commun le point o et pour bases les faces du tétraèdre $a'b'c'd'$, on a l'égalité évidente

$$V' = \frac{V'_a}{V_a} V_a + \frac{V'_b}{V_b} V_b + \frac{V'_c}{V_c} V_c + \frac{V'_d}{V_d} V_d.$$

Or, les tétraèdres V_a, V'_a ayant en commun les trois arêtes qui se coupent au point o ,

$$\frac{V'_a}{V_a} = \frac{ob' \cdot oc' \cdot od'}{ob \cdot oc \cdot od};$$

de même,

$$\frac{V'_b}{V_b} = \frac{oa' \cdot oc' \cdot od'}{oa \cdot oc \cdot od}, \quad \frac{V'_c}{V_c} = \frac{oa' \cdot ob' \cdot od'}{oa \cdot ob \cdot od}, \quad \frac{V'_d}{V_d} = \frac{oa' \cdot ob' \cdot oc'}{oa \cdot ob \cdot oc}.$$

De là résulte la relation que nous voulions établir.

Si les points a', b', c', d' sont sur les faces A, B, C, D , on aura

$$\frac{oa}{oa'} = 1 - \frac{aa'}{oa'} = 1 - \frac{V}{V_a}, \quad \frac{ob}{ob'} = 1 - \frac{V}{V_b}, \quad \dots,$$

en appelant V le volume $abcd$; l'égalité (1) devient

$$V' = - \frac{3V V_a V_b V_c V_d}{(V - V_a)(V - V_b)(V - V_c)(V - V_d)}.$$

Dans cette relation, on doit donner aux volumes V_a, V_b, V_c, V_d des signes tels que leur somme soit égale à V .

En particulier, si le point o est le centre de la sphère

inscrite au tétraèdre $abcd$, on aura

$$V' = - \frac{3 V.A.B.C.D}{(S-A)(S-B)(S-C)(S-D)},$$

en posant

$$S = A + B + C + D.$$

C'est, à un facteur numérique près (-3 au lieu de 6), le résultat indiqué par M. Genty (question 1332, 1^{re} Partie).

V. L'expression (1) que nous venons de trouver pour le volume du tétraèdre $a'b'c'd'$, homologique du tétraèdre $abcd$, peut se mettre sous une autre forme. Si par le point o nous menons des plans parallèles aux faces $b'c'd'$, $c'd'a'$, $d'a'b'$, $a'b'c'$, ces plans rencontrent les faces correspondantes bcd , cda , dab , abc du tétraèdre $abcd$, suivant quatre droites qui appartiennent à un même plan I, parallèle au plan d'homologie.

Mais, d'après une propriété connue des figures homologiques, si l'on désigne par k la distance du plan I au plan d'homologie, on a

$$\frac{oa}{oa'} = \frac{(a, I)}{k}, \quad \frac{ob}{ob'} = \frac{(b, I)}{k}, \quad \frac{oc}{oc'} = \frac{(c, I)}{k}, \quad \frac{od}{od'} = \frac{(d, I)}{k}.$$

D'ailleurs,

$$V(o, I) = V_a(a, I) + V_b(b, I) + V_c(c, I) + V_d(d, I);$$

donc

$$\frac{(o, I)}{k} = \frac{\frac{oa}{oa'} V_a + \frac{ob}{ob'} V_b + \frac{oc}{oc'} V_c + \frac{od}{od'} V_d}{V}.$$

L'expression (1) devient ainsi

$$a'b'c'd' = \frac{k^3(o, I)V}{(a, I)(b, I)(c, I)(d, I)}.$$

VI. Dans le déterminant Δ , remplaçons les volumes par les valeurs

$$a'bcd = \frac{1}{3}A(a', A),$$

$$a'cda = \frac{1}{3}B(a', B),$$

$$a'dab = \frac{1}{3}C(a', C),$$

$$\dots\dots\dots;$$

nous obtenons la relation

$$\begin{vmatrix} (a', A) & (a', B) & (a', C) & (a', D) \\ (b', A) & (b', B) & (b', C) & (b', D) \\ (c', A) & (c', B) & (c', C) & (c', D) \\ (d', A) & (d', B) & (d', C) & (d', D) \end{vmatrix} = \frac{(3V)^2 \cdot 3V'}{A \cdot B \cdot C \cdot D},$$

qui se trouve dans mon Mémoire sur les indices (n° 87).

VII. D'un point o on abaisse les perpendiculaires oa' , ob' , oc' , od' sur les faces du tétraèdre $abcd$; si l'on désigne par V' le volume du tétraèdre $a'b'c'd'$, par V celui du tétraèdre $abcd$, et par A, B, C, D les aires de ses faces,

$$V' = \frac{3V^2}{4ABCD} oa' \cdot ob' \cdot oc' \cdot od' \left(\frac{A}{oa'} + \frac{B}{ob'} + \frac{C}{oc'} + \frac{D}{od'} \right).$$

En effet, le volume V' est la somme algébrique de quatre tétraèdres ayant pour sommet commun le point o et pour bases les triangles $b'c'd'$, $c'd'a'$, $d'a'b'$, $a'b'c'$.

Or

$$6b'c'd' = ob' \cdot oc' \cdot od' \sin b'od' \sin (oc', b'od').$$

Mais

$$\sin b'od' = \sin BD, \quad \sin (oc', b'od') = \sin (oc, C);$$

par conséquent,

$$6b'c'd' = ob' \cdot oc' \cdot od' \sin BD \sin (oc, C) = ob' \cdot oc' \cdot od' \frac{(3V)^2}{2BCD}.$$

On a des expressions analogues pour les valeurs des

autres tétraèdres qui composent le volume V' . De là résulte la relation indiquée.

Lorsque, en particulier, le point o est le centre d'une sphère inscrite au tétraèdre V , les distances oa' , ob' , oc' , od' sont égales au rayon r de cette sphère, et l'on trouve

$$V' = \frac{9r^2 V^3}{4 A \cdot B \cdot C \cdot D}.$$

C'est la seconde des relations indiquées dans la question 1332.

VIII. Cette relation peut aussi se déduire du théorème suivant, que nous avons proposé en question, et qui a été démontré dans les *Nouvelles Annales* :

Lorsque deux tétraèdres sont polaires réciproques par rapport à une surface du second degré, le volume de l'un est égal au cube du volume de l'autre, divisé par trente-six fois le produit des quatre tétraèdres qui ont pour bases les faces de ce dernier et pour sommet commun le centre de la surface, multiplié par le carré du produit des demi-axes de cette surface.