

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 321-328

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__321_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

*Lettre de M. L. Doucet, professeur au Lycée Corneille
à Rouen.*

Monsieur,

Voulez-vous me permettre de vous adresser une nouvelle solution d'un problème déjà traité plusieurs fois dans les *Annales*? Il s'agit de la question comprise sous les n^{os} 970 et 1028, question assez difficile, à mon avis. Je n'ai pas su retrouver dans les *Annales* la première solution. Une lettre de M. Bourguet, t. XIII, p. 576, en fait la critique et signale une erreur. M. Bourguet traite la question à son tour et termine en concluant que le lieu est du huitième ordre. Plus tard, en 1877, M. Poujade, reprenant les résultats de M. Bourguet, annonce qu'on peut décomposer son équation du huitième degré; il y

trouve un quadrilatère imaginaire, ayant pour sommets les quatre foyers de l'ellipse donnée, puis l'ensemble de deux coniques, l'une intérieure à cette ellipse (solution à rejeter par conséquent), l'autre extérieure, qui est la vraie solution. M. Poujade clôt sa lettre en donnant le moyen de former une équation du dixième degré contenant, outre ce qui précède, l'ellipse donnée elle-même. Depuis lors, si je ne me trompe, la question n'a pas reparu dans les *Nouvelles Annales*. Dans la solution que je vous envoie, il n'y a ni dixième ni huitième degré; je vais tout droit à la courbe du *second* degré, qui est la réponse unique à la question posée. Je donne en outre, par le même procédé de calcul, le lieu du point de concours des hauteurs du triangle.

La question est fort intéressante. Elle m'a été communiquée par les élèves de Mathématiques spéciales de Rouen, à qui l'avaient envoyée des camarades du lycée Louis le-Grand (classe de M. Pruvost). Je n'ai pas trouvé du premier coup la solution relativement simple que je vous envoie.

On circonscrit à une ellipse donnée un triangle ayant pour hauteurs les droites qui joignent les sommets aux points de contact de la courbe avec les côtés opposés : lieu des sommets du triangle ; lieu du point de concours des hauteurs.

Soient

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = P = 0,$$

$$x \cos \beta + y \sin \beta - q = Q = 0,$$

$$x \cos \gamma + y \sin \gamma - r = R = 0$$

les équations des polaires des sommets du triangle.

La conique donnée aura une équation de la forme

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{Q} + \frac{C}{R} = 0,$$

et, si l'on exprime les conditions de l'énoncé, on a immédiatement

$$A = B = C.$$

Nous allons donc identifier l'équation

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} = 0$$

avec l'équation

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0.$$

On obtient ainsi

$$(1) \quad \begin{cases} p(\cos \beta + \cos \gamma) \\ + q(\cos \gamma + \cos \alpha) + r(\cos \alpha + \cos \beta) = 0, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} p(\sin \beta + \sin \gamma) \\ + q(\sin \gamma + \sin \alpha) + r(\sin \alpha + \sin \beta) = 0, \end{cases}$$

$$(3) \quad \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\alpha + \beta) = 0,$$

$$(4) \quad \begin{cases} \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha + \cos \alpha \cos \beta \\ b^2 \\ \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha + \sin \alpha \sin \beta \\ a^2 \\ - q' + \frac{1}{a^2} p - \frac{p q}{a^2 b^2} \end{cases}$$

Désignons par λ la valeur commune de ces trois rapports ; cette valeur est facile à déterminer. En effet, les équations (4) donnent

$$(5) \quad \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) + \cos(\alpha + \beta) = -\lambda c^2,$$

$$(6) \quad \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) + \cos(\alpha - \beta) = \lambda(a^2 + b^2).$$

Si l'on ajoute les équations (3) et (5) élevées au carré, en tenant compte de l'équation (6), on a

$$c^2 \lambda^2 - 2(a^2 + b^2) \lambda - 3 = 0,$$

et il faut prendre la racine négative, car la racine positive rendrait l'expression $\lambda(a^2 + b^2)$, c'est-à-dire la somme des trois cosinus du premier membre de l'équation (6), supérieure à 3.

Donc

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 3c^4}}{c^2}.$$

Soient maintenant x_1 et y_1 les coordonnées du sommet M, pôle de la droite $R = 0$. On a évidemment

$$P_1 = Q_1 = -R_1$$

et, si l'on désigne par μ' la valeur de ces trois expressions,

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = p + \mu',$$

$$x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta = q + \mu',$$

$$x_1 \cos \gamma + y_1 \sin \gamma = r + \mu'.$$

Multiplions ces trois équations respectivement par

$$\cos \beta + \cos \gamma, \quad \cos \gamma + \cos \alpha, \quad \cos \alpha + \cos \beta$$

et ajoutons. Nous trouvons ainsi

$$\lambda b^2 x_1 = \mu' \cos \gamma.$$

En multipliant de nouveau par

$$\sin \beta + \sin \gamma, \quad \sin \gamma + \sin \alpha, \quad \sin \alpha + \sin \beta,$$

on trouve de même

$$\lambda a^2 y_1 = \mu' \sin \gamma.$$

Donc

$$\mu'^2 = \lambda^2 (b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2),$$

et comme, d'autre part,

$$\mu'^2 = \lambda (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2) = 0,$$

on a, pour l'équation du lieu de M,

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2 + \lambda (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2) = 0,$$

λ recevant la valeur déterminée plus haut.

Cette conique est extérieure à l'ellipse donnée. En effet, λ étant négatif, on a nécessairement

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2 > 0.$$

J'obtiens de la même manière le lieu du point de concours H des hauteurs du triangle. Soient x_0, y_0 les coordonnées de ce point. Il est clair que $P_0 = Q_0 = R_0$, et, si l'on désigne par μ la valeur commune de ces trois expressions, on a immédiatement

$$(\varepsilon) \quad 3\mu^2 = \lambda(a^2y_0^2 + b^2x_0^2 - a^2b^2).$$

Multiplions par

$$\cos \beta + \cos \gamma, \cos \gamma + \cos \alpha, \cos \alpha + \cos \beta$$

les trois équations

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha = p + \mu,$$

$$x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta = q + \mu,$$

$$x_0 \cos \gamma + y_0 \sin \gamma = r + \mu,$$

et ajoutons. Nous aurons, en tenant compte de (1), (2) et (3),

$$\lambda b^2 x_0 = \mu (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$$

On aurait de même, en multipliant par $\sin \beta + \sin \gamma, \dots$,

$$\lambda a^2 y_0 = \mu (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

En élevant au carré ces deux dernières équations, les ajoutant et tenant compte des équations (4) et de la valeur de λ , on a

$$\mu^2 = \frac{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}{c^2}.$$

Si l'on substitue dans l'équation (ε), on a le lieu du point H :

$$3(b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2) = c^4 \lambda (a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2).$$

Cette conique est intérieure à l'ellipse donnée, puisque, λ étant négatif, on a nécessairement

$$a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2 < 0.$$

*Lettre de M. A. Legoux, professeur à la Faculté
des Sciences de Grenoble.*

Monsieur le Rédacteur,

A propos de la remarquable méthode d'intégration de l'équation des lignes de courbure de l'ellipsoïde de M. A. Picart, permettez-moi de vous rappeler une autre méthode géométrique que j'ai donnée en 1878 et dont j'ai indiqué l'application au cas particulier actuel (*Étude analytique et géométrique d'une famille de courbes*, p. 18).

Voici en quelques mots l'esprit de cette méthode :

On remarque d'abord que l'équation différentielle

$$-xy p^2 + (y^2 - x^2 - b^2)p + xy = 0,$$

où

$$p = \frac{dy}{dx},$$

peut se mettre sous la forme

$$(py - x)(y - px) + b^2p = 0.$$

Cela posé, on fait un changement de variables ; on prend pour nouvelles variables x' et y' , liées aux anciennes par les équations

$$\begin{aligned} x &= p', \\ y &= p'x' - y', \\ p' &= \frac{dy'}{dx'}. \end{aligned}$$

On voit sans peine que

$$\begin{aligned} p &= x', \\ px - y &= y'. \end{aligned}$$

On sait que cette transformation revient à prendre la courbe transformée par polaires réciproques de la pro-

(327)

posée relativement à la parabole

$$x^2 = 2y.$$

Le principe de cette transformation est dû à Monge (voir CHASLES, *Aperçu historique*, p. 376).

L'équation différentielle proposée devient

$$p'(x'^2 - 1)y' + x'y'^2 + b^2x' = 0,$$

que l'on rend linéaire en posant

$$y'^2 = u$$

et dont l'intégrale est

$$u = y'^2 = c(x'^2 - 1) - b^2;$$

c'est l'équation d'un système de coniques.

L'intégrale générale cherchée est l'équation des polaires réciproques de ces coniques relativement à la parabole

$$x^2 = 2y.$$

On trouve sans peine que cette équation est

$$\frac{x^2}{c} - \frac{y^2}{c - b^2} = 1;$$

elle représente des coniques homofocales.

*Lettre de M. A. Hilaire, professeur au Lycée
de Douai.*

Monsieur le Rédacteur,

Voulez-vous me permettre, quoique je ne sois nullement en cause, de répondre à la réclamation de M. Mansion (1881, p. 143) ?

Si l'on se reporte à l'article de M. Weill (1880, p. 255), la phrase citée par M. Mansion s'y trouve intercalée entre deux théorèmes; elle se termine en réalité par un point, et non, comme dans la citation, par deux

points; elle s'applique donc au premier des deux théorèmes :

Si une conique est inscrite dans un triangle, et que la somme des carrés de ses axes reste constante, son centre décrit une circonférence ayant pour centre le point de concours des hauteurs du triangle.

Or cette proposition, très connue, est due à Steiner, et elle a été seulement étendue à l'espace par M. Mention, professeur à Paris, et collaborateur des *Nouvelles Annales* jusqu'en 1867.

Je terminerai par deux indications bibliographiques :

1° On s'explique que M. Mention ait pu être regardé comme l'auteur du théorème de Géométrie plane, parce qu'il l'avait énoncé et démontré, sans en indiquer l'origine, à la fin d'un long article sur l'hyperbole équilatère (*Nouvelles Annales*, 1865, p. 38).

2° Le théorème analogue de l'espace est ainsi conçu :

Si un ellipsoïde est inscrit à un système de six plans, et que la somme des carrés de ses axes reste constante, son centre décrit une sphère.

M. Mention n'avait pas fait connaître la position du centre de la sphère par rapport aux six plans donnés : cette détermination a été faite par M. Paul Serret.

On peut consulter là-dessus trois articles de ce dernier auteur, qui ont paru dans l'année 1865 de votre Journal (p. 145, 193 et 433) et qui ont servi de préliminaires à la *Géométrie de direction*, ouvrage publié quatre ans plus tard, en 1869.

Note. — Les questions 1342 et 1357 ont été résolues par M. Pisani; et les questions 1348 et 1353 par M. Artemieff, à Saint-Petersbourg.
