

A. DROZ

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 305-307

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__305_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. A. DROZ.

Dans l'*Aperçu historique*, Chasles cite le théorème suivant :

Le plan tangent et la normale en un point P d'une surface du second degré coupent un des plans diamétraux de la surface suivant une droite et un point tels, que le point est le pôle de la droite par rapport à la conique focale contenue dans le plan.

La démonstration analytique est bien simple.

Soit $\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 1$ l'équation d'une surface du second degré à centre.

Le plan tangent au point (x', y', z') de la surface aura pour équation

$$\frac{xx'}{L} + \frac{yy'}{M} + \frac{zz'}{N} = 1.$$

Ce plan coupe le plan des xy suivant une droite qui aura pour équations

$$(1) \quad z = 0, \quad \frac{xx'}{L} + \frac{yy'}{M} = 1.$$

Équations de la normale en (x', y', z') :

$$\begin{aligned} \frac{L}{x'} (x - x') &= \frac{N}{z'} (z - z'), \\ \frac{M}{y'} (y - y') &= \frac{N}{z'} (z - z'). \end{aligned}$$

Cette ligne coupe le plan des xy en un point, dont

les coordonnées sont

$$x_0 = \frac{x'(L - N)}{L}, \quad y_0 = \frac{y'(M - N)}{M}, \quad z_0 = 0.$$

Si l'on cherche la polaire de ce point par rapport à la conique focale

$$\frac{x^2}{L - N} + \frac{y^2}{M - N} = 1,$$

on trouve

$$\frac{xx'}{L} + \frac{yy'}{M} = 1,$$

équation qui est la même que l'équation (1).

Une surface du second degré S est coupée par un plan P suivant une conique C_2 . Construisons en chaque point de C_2 la normale à S . Toutes ces normales forment une surface réglée du quatrième degré S_4 .

Chasles fait usage du théorème précité (*Journal de Liouville*) pour prouver que S_4 peut être coupée par une infinité de plans suivant des coniques. On démontre facilement que cette surface est du quatrième degré et qu'elle possède une courbe double du troisième degré. Si par un point Q quelconque on mène toutes les parallèles aux normales de S , ces lignes seront sur un cône du second degré.

Car, par le point Q , menons un plan. Si du point π , pôle de P par rapport à S , on abaisse la perpendiculaire πq , on pourra mener par cette ligne deux plans tangents à la surface en des points de C_2 . Les normales en ces points seront parallèles au plan mené par Q . Chacun de ces plans contient donc deux génératrices du cône; il est du second degré. Le plan infini coupe la surface S_4 , d'abord suivant la conique qu'elle a en commun avec le cône, et suivant deux droites, les normales de S aux points infinis de C_2 . La section étant du quatrième degré, la surface réglée S_4 est du quatrième degré.

Si du point π on abaisse une perpendiculaire sur le plan P , on pourra mener par cette droite deux plans tangents à la surface S en des points de C_2 , et les normales en ces points sont dans le plan P .

Donc, il y a sur le plan P trois points par lesquels passent deux des génératrices de S_4 . On en déduit qu'il y a sur S_4 une courbe C_3 du troisième degré, par chaque point de laquelle passent deux des normales de S . C_3 est, pour cette raison, une courbe double du troisième degré sur S_4 .

Un plan quelconque coupe donc S_4 suivant une courbe du quatrième degré ayant trois points doubles.

Chaque plan passant par une normale coupe la surface suivant une courbe du troisième degré avec un point double.

Chaque plan contenant deux normales coupe encore S_4 suivant une conique.