NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. HIOUX

Note relative à la question 1210

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20 (1881), p. 276-279

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__276_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE RELATIVE A LA QUESTION 1210

(voir 2e série, t. XVI, p. 523),

PAR M. V. HIOUX.

Trouver l'enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe donnée et qui demeure tangente à un système de trois diamètres conjugués d'une surface à centre du second degré également donnée.

La solution publiée, 2e série, t. XVI, p. 523, est très simple et très élégante, mais elle n'est pas complète.

Nous nous proposons de reprendre et d'achever la solution du problème. Établissons pour cela quelques préliminaires.

I. Si un cône du second degré a pour équation

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + \ldots = 0,$$

pour que ce cône soit *capable* d'un trièdre ayant ses arêtes parallèles à trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde ayant pour demi-axes a, b, c, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$Ma^2 + Nb^2 - Pc^2 = 0 \quad (1). \tag{1}$$

II. Appelons (D) une déférente anallagmatique, (S) la sphère directrice de centre O et de rayon R, (P) le plan tangent au centre de la sphère variable Σ dont on cherche l'enveloppe.

Du point O abaissons sur le plan (P) la perpendiculaire $O\mu'$, qui rencontre Σ en m et m', points équidi-

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. II, p. 429.

stants de μ'. On sait que m et m' sont les points de contact de Σ et de son enveloppe.

Sur $O\mu'$, marquons un point μ tel que l'on ait

$$O\mu . O\mu' = R^2.$$

Le point μ étant le pôle du plan (P) par rapport à (S), le lieu du point μ est la polaire réciproque (D') de (D) par rapport à (S). Or, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point m, et par x', y', z' celles du point μ, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{2R^2 x}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \\ y' = \dfrac{2R^2 y}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \\ z' = \dfrac{2R^2 z}{x^2+y^2+z^2+R^2}. \end{cases}$$

Ces formules sont de M. Darboux (*Annales de l'École Normale*, 1864). On peut d'ailleurs les établir comme il suit :

Les coordonnées du point m étant x, y, z, celles du point m' sont

$$\frac{R^2 x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{R^2 y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{R^2 z}{x^2+y^2+z^2},$$

puisque l'on a

$$Om . Om' = R^2.$$

Le plan (P), perpendiculaire sur Om et également distant de m et de m', a pour équation

$$xX + yY + zZ = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+R^2).$$

Le même plan (P) est le plan polaire du point $\mu(x', y', z')$ par rapport à la sphère (S), représentée par

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2.$$

On a donc encore, pour l'équation du plan (P),

$$x'X + y'Y + z'Z = R^2.$$

En identifiant ces deux équations du même plan, on obtient les formules (2).

III. Lorsque la déférente (A) est une surface du second ordre, on peut toujours supposer son équation ramenée à la forme

$$(D) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z - F = 0.$$

Alors, si l'on pose

$$H = F + \frac{C^2}{A} + \frac{C'^2}{A'} + \frac{C''^2}{A''},$$

la polaire réciproque (D') de (D) par rapport à

$$(S) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

est représentée par l'équation

$$(D') = H\left(\frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{A'} + \frac{z'^2}{A''}\right) - \left(\frac{Cx'}{A} + \frac{C'y'}{A'} + \frac{C''z'}{A''} + R^2\right)^2 = 0.$$

L'emploi des formules (2) donne, pour l'équation de la cyclide,

$$(3)\quad 4H\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''}\right) - \left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2Cx}{A} + \frac{2C'y}{A'} + \frac{2C''z}{A''} + R^2\right)^2 = 0.$$

Si, dans cette équation, on pose

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

le premier membre, après suppression du facteur commun 4, devient identique à celui de (D') débarrassé des accents de x, y, z. Donc la cyclide passe par la courbe sphé-

rique d'intersection de (S) et de la polaire réciproque de la déférente par rapport à (S).

IV. Ces préliminaires posés, nous indiquerons simplement la marche de la solution.

Prenons pour axes coordonnés trois droites rectangulaires OX, OY, OZ parallèles aux axes $2a$, $2b$ et $2c$ de l'ellipsoïde donné.

Soit $M(\alpha, \beta, \gamma)$ le centre d'une sphère variable Σ coupant orthogonalement la sphère directrice

$$(S) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

L'équation de Σ est

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + R^2 = 0.$$

Soit $C(x_1, y_1, z_1)$ le centre de l'ellipsoïde, et soit $P = 0$ le plan polaire de ce point par rapport à Σ.

Le cône de sommet C circonscrit à Σ a pour équation

$$f_1 f - P^2 = 0,$$

en représentant par f_1 le premier membre de f pour $x = x_1, y = y_1, z = z_1$.

Les coefficients des termes en x^2, y^2 et z^2 sont

$$f_1 - (x_1 - \alpha)^2, \quad f_1 - (y_1 - \beta)^2, \quad f_1 - (z_1 - \gamma)^2.$$

En les multipliant respectivement par a^2, b^2 et c^2, puis ajoutant, on doit avoir

$$(a^2 + b^2 + c^2) f_1 - a^2(x_1 - \alpha)^2 - b^2(y_1 - \beta)^2 - c^2(z_1 - \gamma)^2 = 0.$$

Cette équation représente le lieu du point M. Elle est du second degré en α, β, γ et ne renferme pas les rectangles de ces variables. On est ainsi ramené au problème traité au § III.