NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. BOUDÈNES

Concours d'admission à l'École centrale (première session, 1879)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20 (1881), p. 235-238

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__235_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(PREMIERE SESSION, 1879);

SOLUTION DE M. J. BOUDÈNES,
Élève du lycée de Grenoble.

Soient deux axes rectangulaires Ox *et* Oy, *sur* Ox *un point* A, *sur* Oy *un point* B. *On considère toutes les hyperboles équilatères qui passent au point* A *et sont tangentes à l'axe* Oy *au point* B.

1° *Former l'équation générale de ces hyperboles équilatères.*

2° *Trouver le lieu des points de rencontre de la tangente en* A *à chacune de ces hyperboles avec les parallèles menées par l'origine aux asymptotes de cette même hyperbole.*

3° *Le lieu précédent est une parabole* P : *former l'équation de l'axe et l'équation de la tangente au sommet de cette parabole* P, *construire ces droites et déterminer géométriquement la grandeur du paramètre de cette parabole.*

4° *Trouver le lieu du sommet de la parabole* P *quand le point* A *se déplace sur* Ox, *le point* B *restant fixe.*

Soient $OA = a$, $OB = b$, k et λ des paramètres arbitraires.

1° Si l'équation

$$y = \lambda(x - a) \tag{1}$$

représente la tangente à l'une des hyperboles au point A, cette hyperbole aura pour équation

$$x[y - \lambda(x - a)] + k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 = 0,$$

avec la condition

$$k = \frac{\lambda}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}},$$

qui exprime que l'hyperbole est équilatère.

2° Les parallèles menées de l'origine aux asymptotes de ces hyperboles ont pour équation

$$x(y - \lambda x)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0. \tag{2}$$

Le lieu de leurs points d'intersection avec la tangente à l'hyperbole au point A, obtenu par l'élimination du

paramètre variable λ entre les équations (1) et (2), a donc pour équation

$$(3) \qquad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 - ax\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) = 0.$$

C'est donc une parabole qui passe par l'origine des coordonnées et qui a pour tangente en ce point l'axe des y.

3° m étant un paramètre arbitraire, l'équation (3) de cette parabole s'écrit identiquement

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+m\right)^2 - ax\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2m}{a^2}\right) - \frac{2my}{b} - m^2 = 0.$$

La condition que le diamètre

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+m = 0$$

et la tangente à son extrémité

$$ax\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2m}{a^2}\right)+\frac{2my}{b}+m^2 = 0$$

sont perpendiculaires nous donne immédiatement

$$m = -\frac{1}{2},$$

d'où, pour équations de l'axe et de la tangente au sommet,

$$(4) \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{1}{2} = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{x}{b}-\frac{y}{a}+\frac{b}{4a} = 0.$$

Si donc

$$OA_1 = \frac{OA}{2}, \quad OB_1 = \frac{OB}{2}, \quad OB_2 = \frac{OB}{4},$$

on voit aisément que l'axe de la parabole sera la droite

A_1B_1 et la tangente au sommet la droite B_2S, perpendiculaire à l'axe.

De plus, si la droite $O\omega$ est perpendiculaire à l'axe, la longueur $A_1\omega$ est une sous-normale de la parabole et représente, par suite, la grandeur du paramètre.

4° Le lieu du sommet S de la parabole P, quand le point A se déplace sur Ox, le point B restant fixe, a pour équation

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}by + \frac{b^2}{8} = 0,$$

obtenue par l'élimination du paramètre a entre les deux équations (5) et (4) de la tangente au sommet et de l'axe.

Ce lieu est un cercle dont le centre est au point

$$x = 0, \quad y = \frac{3}{4}b$$

et qui passe par le point B_1,

$$x = 0, \quad y = \frac{b}{2}.$$

Note. — La même question a été resolue par MM. H. Lez; J. Auzelle, élève du lycee de Moulins; H. Herzog, du lycée de Rouen; H. Courbe.