

ÉVESQUE

**Solution d'une question de licence (faculté
de Lille. Novembre 1878)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 229-231

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__229_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE

(FACULTE DE LILLE. — NOVEMBRE 1878);

PAR M. ÈVESQUE,

Élève de la Faculté des Sciences de Montpellier.

Une surface de révolution autour de l'axe des z est définie par l'équation $z=f(r)$: trouver l'équation différentielle en coordonnées polaires des projections sur le plan des xy des courbes tracées sur cette surface et qui jouissent de la propriété que le plan osculateur en chaque point de l'une d'elles comprenne la normale à la surface en ce point.

Il résulte de l'énoncé même du problème que le plan osculateur en un point quelconque de l'une des courbes en question doit être normal à la surface, ce qui est la propriété caractéristique des lignes géodésiques; la normale à la surface aura donc la même direction que la normale principale; or celle-ci fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$; d'un autre côté, la normale à la surface fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$.

Or, l'équation de la surface proposée étant, en coor-

(230)

données rectangulaires,

$$F = z - f(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0,$$

on voit que les cosinus des angles que la normale à cette surface fait avec les axes sont proportionnels à

$$-\frac{df}{d\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad -\frac{df}{d\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 1.$$

Ces deux normales devant se confondre, on devra avoir

$$(1) \quad \frac{d \frac{dx}{ds}}{x} = \frac{d \frac{dy}{ds}}{y},$$

équation qui va nous donner l'équation différentielle des courbes proposées. Elle donne, en effet,

$$y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} = 0, \\ y dx - x dy = -C ds.$$

Or

$$x dy - y dx = r^2 d\theta;$$

on a donc l'équation

$$(2) \quad r^2 d\theta = C ds.$$

Mais

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + f'^2(r) dr^2;$$

donc l'équation différentielle des projections sur le plan xy des lignes géodésiques de la surface $z = f(r)$ sera

$$r^2 d\theta = C \sqrt{dr^2 (1 + f'^2) + r^2 d\theta^2},$$

ou bien, finalement,

$$(3) \quad d\theta^2 = \frac{C^2 (1 + f'^2) dr^2}{r^2 (r^2 - C^2)};$$

c'est l'équation demandée.

L'équation (2) montre que l'aire de la courbe dont l'équation (3) est l'équation différentielle est proportionnelle à l'arc s de la courbe gauche de l'espace.

Observation. — Le numéro de février 1881 des *Nouvelles Annales* renferme une solution de cette question, due à M. Fauquembergue. Il arrive finalement à une équation différentielle du second ordre, que voici :

$$(a) \quad \left(\begin{aligned} & r(1+f'^2) \frac{d^2\theta}{dr^2} \\ & + [2(1+f'^2) - rf'f''] \frac{d\theta}{dr} + r^2 \frac{d\theta^3}{dr^3} = 0. \end{aligned} \right.$$

On remonte aisément de cette équation à l'équation (3) ci-dessus, qui est du premier ordre, car l'équation (a) rentre dans la classe des équations

$$\frac{dy}{dx} + P_1y + Q_1x^n = 0,$$

que l'on sait intégrer (*Cours d'Analyse* de STURM, p. 50); il suffit donc de poser $\frac{d\theta}{dr} = y$.
