

F. BRIOT

Résolution de l'équation du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 225-227

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__225_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. F. BRIOT,

Capitaine d'infanterie de marine, à Cherbourg.

Étant donnée l'équation générale du quatrième degré, on peut toujours, par une transformation facile à effectuer, la ramener à la forme

$$(1) \quad x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

et faire dépendre la variable de trois inconnues auxiliaires v, γ, z , en posant

$$x = v + \gamma + z,$$

ce qui donne

$$(v + \gamma + z)^4 + A(v + \gamma + z)^2 + B(v + \gamma + z) + C = 0$$

et successivement

$$\begin{aligned} & (v^2 + \gamma^2 + z^2 + 2v\gamma + 2vz + 2\gamma z)^2 \\ & + A(v^2 + \gamma^2 + z^2 + 2v\gamma + 2vz + 2\gamma z)^2 \\ & + B(v + \gamma + z) + C = 0, \\ & (v^2 + \gamma^2 + z^2)^2 + 4(v^2 + \gamma^2 + z^2)(v\gamma + v\gamma + \gamma z) \\ & + 4(v^2 z^2 + v^2 \gamma^2 + \gamma^2 z^2) + 8v\gamma z(v + \gamma + z) \\ & + A(v^2 + \gamma^2 + z^2) + 2A(v\gamma + v\gamma + \gamma z) \\ & + B(v + \gamma + z) + C = 0, \\ & (v^2 + \gamma^2 + z^2)^2 \\ & + [2(v^2 + \gamma^2 + z^2) + A](2v\gamma + 2v\gamma + 2\gamma z) \\ & + A(v^2 + \gamma^2 + z^2) + (8v\gamma z + B)(v + \gamma + z) \\ & + 4(v^2 \gamma^2 + v^2 z^2 + \gamma^2 z^2) + C = 0. \end{aligned}$$

En établissant, ce qui est toujours possible, entre v, γ et z les relations suivantes

$$v^2 + \gamma^2 + z^2 = -\frac{A}{2}, \quad v\gamma z = -\frac{B}{8},$$

et en remarquant que les deuxième et quatrième termes de la dernière égalité disparaissent, on obtient

$$v^2 y^2 + v^2 z^2 + y^2 z^2 = \frac{A^2}{16} - \frac{C}{4}.$$

Dès lors, v^2 , y^2 et z^2 sont les racines de l'équation cubique

$$(2) \quad X^3 + \frac{A}{2} X^2 + \left(\frac{A^2}{16} - \frac{C}{4} \right) X - \frac{B^2}{64} = 0.$$

Par conséquent, v , y , z peuvent être déterminés, et, en combinant convenablement leurs six valeurs, on obtient huit quantités égales deux à deux et de signes contraires; mais l'équation proposée, contenant une puissance impaire de l'inconnue, ne peut admettre pour racines que quatre d'entre elles ayant des valeurs absolues différentes.

L'existence de ces huit quantités s'explique facilement en considérant que le changement de signe du coefficient B entraîne nécessairement celui des quatre racines considérées, sans modifier celles qui servent à les déterminer.

Il est facile de s'assurer que l'équation (1) admettra quatre racines réelles, ou deux racines réelles et deux imaginaires, ou bien quatre racines imaginaires, lorsque l'équation (2) aura trois racines positives ou deux racines imaginaires et une positive, ou bien des groupes de racines différents des précédents.

Lorsque $B = 0$, les valeurs de x sont données par la formule

$$x = \pm \sqrt{-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - C}};$$

elles le sont également par la suivante

$$x = \pm \sqrt{-\frac{A}{4} + \sqrt{\frac{C}{4}}} \pm \sqrt{-\frac{A}{4} - \sqrt{\frac{C}{4}}},$$

et l'identité de ces deux expressions se vérifie facilement en les élevant au carré.