

AUGUSTE SCHOLTZ

Résolution de l'équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 220-224

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__220_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. LE D^r AUGUSTE SCHOLTZ,

A Budapest.

Déterminons les valeurs de la deuxième polaire (émanant) de la forme cubique

$$f = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

pour le pôle j_1, j_2 et pour les valeurs du rapport $x_1 : x_2$, pour lesquels la forme f se réduit à zéro.

Le covariant quadratique H (hessien) et le covariant cubique Q (jacobien de la forme f et du hessien H) de la forme f sont

$$\begin{aligned} \text{H} &= (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2, \\ \text{Q} &= c_0 x_1^3 + 3 c_1 x_1^2 x_2 + 3 c_2 x_1 x_2^2 + c_3 x_2^3, \end{aligned}$$

si

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3, \\ c_1 &= a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2, \\ c_2 &= - (a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2), \\ c_3 &= - (a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2^3). \end{aligned}$$

Le discriminant de la forme f est

$$\Delta = (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4 (a_0 a_2 - a_1^2) (a_1 a_3 - a_2^2).$$

En désignant les racines négatives de l'équation

$$\text{H} = 0$$

par r_0 et r_1 , ainsi que

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2 + \sqrt{\Delta}}{2 (a_0 a_2 - a_1^2)}, \\ r_1 &= \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2 - \sqrt{\Delta}}{2 (a_0 a_2 - a_1^2)}, \end{aligned}$$

on aura les relations suivantes :

$$\begin{aligned} c_0 + a_0 \sqrt{\Delta} &= c_0 + a_0 \sqrt{\Delta}, \\ (c_0 + a_0 \sqrt{\Delta}) r_1 &= c_1 + a_1 \sqrt{\Delta}, \\ (c_0 + a_0 \sqrt{\Delta}) r_1^2 &= c_2 + a_2 \sqrt{\Delta}, \\ (c_0 + a_0 \sqrt{\Delta}) r_1^3 &= c_3 + a_3 \sqrt{\Delta}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}c_0 - a_0 \sqrt{\Delta} &= c_0 - a_0 \sqrt{\Delta}, \\(c_0 - a_0 \sqrt{\Delta}) r_0 &= c_1 - a_1 \sqrt{\Delta}, \\(c_0 - a_0 \sqrt{\Delta}) r_0^2 &= c_2 - a_2 \sqrt{\Delta}, \\(c_0 - a_0 \sqrt{\Delta}) r_0^3 &= c_3 - a_3 \sqrt{\Delta}.\end{aligned}$$

Multiplions les deux membres des équations précédentes successivement par x_1^3 , $3x_1^2x_2$, $3x_1x_2^2$, x_2^3 et faisons les sommes; nous obtiendrons

$$(1) \quad \begin{cases} (c_0 + a_0 \sqrt{\Delta})(x_1 + r_1 x_2)^3 = Q + f\sqrt{\Delta}, \\ (c_0 - a_0 \sqrt{\Delta})(x_1 - r_0 x_2)^3 = Q - f\sqrt{\Delta}. \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que

$$Q + f\sqrt{\Delta}, \quad Q - f\sqrt{\Delta}$$

sont des cubes complets d'expressions linéaires, résultat qui est déjà connu. Notre développement nous fournissait aussi les expressions linéaires. Des équations (1) on tire

$$(2) \quad f\sqrt{\Delta} = \mu_1^3(x_1 + r_1 x_2)^3 - \mu_0^3(x_1 + r_0 x_2)^3,$$

où

$$(3) \quad \begin{cases} \mu_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}c_0 - \frac{1}{2}a_0\sqrt{\Delta}}, \\ \mu_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}a_0\sqrt{\Delta}}, \end{cases}$$

et où l'on prend pour toutes les deux racines cubiques les valeurs réelles.

On obtient les valeurs du rapport $x_1 : x_2$, pour lesquelles la forme f se réduit à zéro en vertu de l'équation (2) (en supposant que le discriminant Δ est différent de zéro), de la relation suivante

$$(4) \quad \mu_1(x_1 + r_1 x_2) = \varepsilon^2 \mu_0(x_1 + r_0 x_2),$$

où $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ et où l'on met pour ν successivement les valeurs 0, 1, 2.

De l'équation (2) on tire, pour la deuxième polaire de la forme f , c'est-à-dire pour

$$P = (a_0 y_1^2 + 2 a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2) x_1 \\ + (a_1 y_1^2 + 2 a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2) x_2,$$

la valeur

$$P\sqrt{\Delta} = \mu_1^2(y_1 + r_1 y_2)^2(x_1 + r_1 x_2) \\ - \mu_0^2(y_1 + r_0 y_2)^2(x_1 + r_0 x_2)$$

ou

$$P\sqrt{\Delta} = \begin{vmatrix} \mu_0(x_1 + r_0 x_2) & \mu_0^2(y_1 + r_0 y_2)^2 \\ \mu_1(x_1 + r_1 x_2) & \mu_1^2(y_1 + r_1 y_2)^2 \end{vmatrix},$$

et puisque, selon l'équation (2),

$$(5) \quad \begin{cases} \mu_1(x_1 + r_1 x_2) = \varepsilon^\nu \mu_0(x_1 + r_0 x_2), \\ \mu_0(x_1 + r_0 x_2) = \varepsilon^{2\nu} \mu_1(x_1 + r_1 x_2), \end{cases}$$

on peut aussi écrire

$$(6) \quad P\sqrt{\Delta} = \begin{vmatrix} \varepsilon^\nu \mu_0(x_1 + r_0 x_2) & \mu_0^2(y_1 + r_0 y_2)^2 \\ \varepsilon^{2\nu} \mu_1(x_1 + r_1 x_2) & \mu_1^2(y_1 + r_1 y_2)^2 \end{vmatrix}.$$

Parce que

$$\mu_0 \mu_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(c_0^2 - a_0^2 \Delta)} = -(a_0 a_2 - a_1^2)$$

et

$$(a_0 a_2 - a_1^2)(r_0 - r_1) = \sqrt{\Delta},$$

on obtient encore les équations suivantes

$$\begin{vmatrix} \mu_0(x_1 + r_0 x_2) & \mu_0(y_1 + r_0 y_2) \\ \mu_1(x_1 + r_1 x_2) & \mu_1(y_1 + r_1 y_2) \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \sqrt{\Delta}, \\ \begin{vmatrix} \mu_0(y_1 + r_0 y_2) & \mu_0(x_1 + r_0 x_2) \\ \mu_1(y_1 + r_1 y_2) & \mu_1(x_1 + r_1 x_2) \end{vmatrix} = -(x_1 y_2 - x_2 y_1) \sqrt{\Delta}.$$

En multipliant les deux membres de la première équation par $\varepsilon^{\nu}\mu_1(\gamma_1 + r_1\gamma_2)$ et les deux membres de la seconde par $\varepsilon^{2\nu}\mu_0(\gamma_1 + r_0\gamma_2)$, et faisant la différence, on peut obtenir la différence sous la forme

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} \varepsilon^{\nu}\mu_0(x_1 + r_0x_2) & \mu_0^2(\gamma_1 + r_0\gamma_2)^2 \\ \varepsilon^{2\nu}\mu_1(x_1 + r_1x_2) & \mu_1^2(\gamma_1 + r_1\gamma_2)^2 \end{array} \right| \\ + \left| \begin{array}{cc} \varepsilon^{2\nu}\mu_0(x_1 + r_0x_2) & \mu_0\mu_1(\gamma_1 + r_0\gamma_2)(\gamma_1 + r_1\gamma_2) \\ \varepsilon^{\nu}\mu_1(x_1 + r_1x_2) & \mu_0\mu_1(\gamma_1 + r_0\gamma_2)(\gamma_1 + r_1\gamma_2) \end{array} \right| \end{array} \right. \\ = (x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1)[\varepsilon^{\nu}\mu_1(\gamma_1 + r_1\gamma_2) + \varepsilon^{2\nu}\mu_0(\gamma_1 + r_0\gamma_2)]\sqrt{\Delta}.$$

Le premier déterminant du côté gauche est, selon l'équation (6), identique à $P\sqrt{\Delta}$. Le second déterminant s'évanouit, puisque, en vertu de l'équation (5), les éléments de la première colonne sont aussi égaux. Selon les équations (1) et (3), on a encore

$$\mu_1(\gamma_1 + r_1\gamma_2) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q' + \frac{1}{2}f'\sqrt{\Delta}},$$

$$\mu_0(\gamma_1 + r_0\gamma_2) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q' - \frac{1}{2}f'\sqrt{\Delta}},$$

si Q' et f' signifient les formes Q et f , en y remplaçant les arguments x_1, x_2 par γ_1, γ_2 , c'est-à-dire si

$$f' = a_0\gamma_1^3 + 3a_1\gamma_1^2\gamma_2 + 3a_2\gamma_1\gamma_2^2 + a_3\gamma_2^3,$$

$$Q' = c_0\gamma_1^3 + 3c_1\gamma_1^2\gamma_2 + 3c_2\gamma_1\gamma_2^2 + c_3\gamma_2^3.$$

Ainsi l'équation (7) revient à

$$\begin{aligned} & (a_0\gamma_1^2 + 2a_1\gamma_1\gamma_2 + a_2\gamma_2^2)x_1 + (a_1\gamma_1^2 + 2a_2\gamma_1\gamma_2 + a_3\gamma_2^2)x_2 \\ & = (x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1)\left(\varepsilon^{\nu}\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q' + \frac{1}{2}f'\sqrt{\Delta}} + \varepsilon^{2\nu}\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q' - \frac{1}{2}f'\sqrt{\Delta}}\right). \end{aligned}$$

En y substituant des valeurs spéciales convenablement choisies du pôle γ_1, γ_2 , on obtient, de cette équation, les formes connues pour la résolution de l'équation du troisième degré

$$a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3 = 0.$$