

A. PICART

**Condition d'équilibre d'une masse
fluide homogène, ayant la forme d'un
ellipsoïde à trois axes inégaux et animée
d'un mouvement uniforme de rotation
autour de l'un de ces axes**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 216-220

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__216_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONDITION D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE HOMOGÈNE,
AYANT LA FORME D'UN ELLIPSOÏDE A TROIS AXES INÉGAUX
ET ANIMÉE D'UN MOUVEMENT UNIFORME DE ROTATION
AUTOUR DE L'UN DE CES AXES;**

PAR M. A. PICART.

Jacobi a reconnu le premier qu'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe fixe et dont les molécules s'attirent l'une l'autre en raison inverse du carré des distances, peut se maintenir d'elle-même en équilibre sous la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. Il suffit que les trois demi-axes A, B, C et la vitesse angulaire constante ω , avec laquelle le fluide tourne autour de l'axe A, satisfassent aux deux équations de condition

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{B^2}\right)\left(1 + \frac{x}{C^2}\right)D} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{A^2}\right)D},$$

$$\omega^2 = \frac{2\pi\rho}{B^2C^2} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\left(1 + \frac{x}{B^2}\right)\left(1 + \frac{x}{C^2}\right)D},$$

dans lesquelles ρ représente la densité du fluide et D l'expression

$$\sqrt{\left(1 + \frac{x}{A^2}\right)\left(1 + \frac{x}{B^2}\right)\left(1 + \frac{x}{C^2}\right)}.$$

M. Liouville a démontré ces formules, dans le XXIII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, par une méthode analogue à celle qu'avait suivie Laplace

pour reconnaître que la forme d'un ellipsoïde de révolution convient à l'équilibre d'une masse fluide homogène.

Je suis arrivé au même résultat par une voie peut-être plus élémentaire et qui a l'avantage de mettre en évidence, sous une forme très nette, la loi suivant laquelle varie la pesanteur sur la surface.

Les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène à trois axes inégaux sur un point de sa surface sont

$$X = 4\pi\rho x \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y = 4\pi\rho y \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z = 4\pi\rho z \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

λ et μ représentant les quantités $\frac{B^2}{A^2} - 1$, $\frac{C^2}{A^2} - 1$.

On peut écrire

$$X = Mx, \quad Y = Ny, \quad Z = Pz,$$

en posant

$$M = 4\pi\rho \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$N = 4\pi\rho \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$P = 4\pi\rho \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Exprimons la condition pour que l'attraction soit la résultante de deux forces dirigées, l'une, G , suivant la normale à la surface, l'autre, H , suivant la perpendicu-

laire abaissée sur l'axe A :

$$(1) \quad Mx = G \frac{x}{A^2 \sqrt{\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4}}},$$

$$(2) \quad Ny = G \frac{y}{B^2 \sqrt{\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4}}} + H \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

$$(3) \quad Pz = G \frac{z}{C^2 \sqrt{\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4}}} + H \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

ou

$$(1') \quad M = \frac{Gp}{A^2},$$

$$(2') \quad N = \frac{Gp}{B^2} + \frac{H}{r},$$

$$(3') \quad P = \frac{Gp}{C^2} + \frac{H}{r},$$

r étant la distance du point attiré à l'axe A, et p la distance du centre de la surface au plan tangent en ce point; d'où

$$(a) \quad N - \frac{MA^2}{B^2} = P - \frac{MA^2}{C^2},$$

auquel cas

$$(b) \quad G = \frac{MA^2}{p},$$

$$(c) \quad H = \left(N - \frac{MA^2}{B^2} \right) r.$$

La composante normale est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent.

La composante perpendiculaire à l'axe est proportionnelle à la distance du point à l'axe.

Il résulte de là que si une masse fluide homogène

de forme ellipsoïdale dont les axes satisfont à la relation (a) tourne autour de l'axe A avec une vitesse angulaire $\omega = \sqrt{N - \frac{MA^2}{B^2}}$, elle se maintient d'elle-même en équilibre, puisque la composante H est détruite par la force centrifuge, et qu'il ne reste que la composante G, normale à la surface.

La formule (b) exprime la loi suivant laquelle varie la pesanteur sur la surface de cet ellipsoïde :

La pesanteur en chaque point de la surface est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent en ce point.

L'équation de condition (a) se transforme aisément dans la formule suivante

$$\begin{aligned} & -\frac{B^2 C^2}{A^3} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \mu u^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & = \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

En remplaçant λ et μ par leurs valeurs et en posant $\frac{\Lambda^2(1 - u^2)}{u^2} = z$, on obtient finalement l'équation de Jacobi, savoir

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{dz}{\left(1 - \frac{z}{B^2}\right) \left(1 + \frac{z}{C^2}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{z}{\Lambda^2}\right) \left(1 + \frac{z}{B^2}\right) \left(1 + \frac{z}{C^2}\right)}} \\ & - \int_0^\infty \frac{dz}{\left(1 + \frac{z}{A^2}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{z}{\Lambda^2}\right) \left(1 + \frac{z}{B^2}\right) \left(1 + \frac{z}{C^2}\right)}}. \end{aligned}$$

La vitesse angulaire de rotation ω est donnée par la

formule

$$(d) \quad \omega^2 = N - \frac{MA^2}{B^2}.$$

Si l'on applique au second membre une transformation analogue à celle qu'on a fait subir à l'équation (a), on obtient

$$\omega^2 = \frac{2\pi\rho(B^2 - A^2)}{A^2B} \int_0^\infty \frac{x dx}{\left(1 + \frac{x}{A^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{x}{B^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{C^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ce n'est point là la formule donnée par Jacobi. On y arrive aisément en éliminant M de la formule (d), au moyen de la relation (a).

On a ainsi

$$\omega^2 = \frac{PC^2 - NB^2}{C^2 - B^2},$$

et, en transformant le second membre comme précédemment, on obtient

$$\omega^2 = \frac{2\pi\rho}{B^2C^2} \int_0^\infty \frac{x dx}{\left(1 + \frac{x}{B^2}\right) \left(1 + \frac{x}{C^2}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{x}{A^2}\right) \left(1 + \frac{x}{B^2}\right) \left(1 + \frac{x}{C^2}\right)}}.$$