

H. LEZ

**Solution de la question proposée pour
le concours d'admission à l'École
polytechnique en 1880**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 127-131

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__127_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR LE CONCOURS
D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880;**

PAR M. H. LEZ.

Soient M et N les points où l'axe des x rencontre le cercle $x^2 + y^2 = r^2$; considérons une quelconque des hyperboles équilatères qui passent par les points M et N; menons, par un point Q pris arbitrairement sur le cercle, des tangentes à l'hyperbole.

Soient A et B les points où le cercle coupe la droite qui joint les points de contact. Démontrer que, des deux droites QA et QB, l'une est parallèle à une direc-

tion fixe et l'autre passe par un point fixe P. Le point P étant donné, l'hyperbole correspondante qui passe par les points M et N est déterminée; on construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets. Si le point P décrit la droite $y = x$, quel est le lieu décrit par les foyers de l'hyperbole? On déterminera son équation et on le construira.

Pour qu'une hyperbole équilatère

$$(1) \quad x^2 + 2hxy - y^2 + 2gx + 2fx + l = 0$$

passe par les points M, N, il faut que le trinôme $x^2 + 2fx + l = 0$ soit vérifié par $x = \pm r$, c'est-à-dire que le terme en x soit nul; alors $l = -r^2$, et l'équation (1) devient

$$(2) \quad x^2 + 2hxy - y^2 + 2gx - r^2 = 0.$$

Mais la polaire d'un point Q(μ, ν), par rapport à cette conique, est représentée par

$$(\mu + h\nu)x + (h\mu - \nu + g)y + g\nu - r^2 = 0;$$

si le point Q est sur le cercle

$$(3) \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

on a

$$\mu = r \cos \alpha, \quad \nu = r \sin \alpha,$$

et, pour l'équation de la polaire,

$$r(\cos \alpha + h \sin \alpha)x + (hr \cos \alpha - r \sin \alpha + g)y + r(g \sin \alpha - r) = 0.$$

Or cette droite rencontrant le cercle (3) en deux points,

$$(A) \quad x = r \cos \alpha, \quad y = -r \sin \alpha,$$

$$(B) \quad \begin{cases} x = \frac{r \cos \alpha (r^2 - r^2 h^2 - g^2) + 2hr^2(r \sin \alpha - g)}{r^2 + r^2 h^2 + g^2 + 2gr(h \cos \alpha - \sin \alpha)}, \\ y = \frac{r \sin \alpha (r^2 h^2 - r^2 - g^2) + 2r^2(rh \cos \alpha + g)}{r^2 + r^2 h^2 + g^2 + 2gr(h \cos \alpha - \sin \alpha)}, \end{cases}$$

on trouve, pour l'équation de QA,

$$x = r \cos \alpha,$$

et, pour celle de QB,

$$(hr + g \cos \alpha)y + (r - g \sin \alpha)x - (h \sin \alpha + \cos \alpha)r^2 = 0.$$

La première droite est donc perpendiculaire à MN et la seconde passe par un point fixe P $\left(x = -\frac{r^2 h}{g}, y = \frac{r^2}{g}\right)$; car son équation peut facilement se mettre sous la forme

$$\left(y - \frac{r^2}{g}\right)(hr + g \cos \alpha) = \left(x + \frac{r^2 h}{g}\right)(g \sin \alpha - r).$$

Ce point P est le pôle de MN par rapport à l'hyperbole équilatère (2). Lorsqu'il est donné, l'équation (2) ne contient plus de coefficients variables; car on écrira

$$(4) \quad x^2 - \frac{2d}{c}xy - y^2 + \frac{2r^2}{c}y - r^2 = 0,$$

en faisant

$$d = -\frac{r^2 h}{g}, \quad \frac{r^2}{g} = c.$$

L'hyperbole équilatère est donc bien déterminée. Les dérivées $dx + cy = r^2$, $cx - dy = 0$ montrent que son centre est à la rencontre de la polaire du point P, par rapport au cercle (3), avec une droite passant par l'origine O et le même point P. Quant aux axes, leurs coefficients angulaires étant donnés par l'équation

$$du^2 - 2cu - d = 0,$$

de laquelle on tire

$$u = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + d^2}}{d} = \frac{c \pm \gamma}{d},$$

ils sont faciles à tracer; d'ailleurs, ils sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les droites $y = 0$, $dx + cy = r^2$.

1° Celle d'une ellipse

$$(6) \quad r^2(\sqrt{2} + 1) = \alpha^2 \sqrt{2} + \beta^2(2 + \sqrt{2}) ;$$

2° Celle d'une hyperbole

$$(7) \quad r^2(\sqrt{2} - 1) = \alpha^2 \sqrt{2} - \beta^2(2 - \sqrt{2}) .$$

Ces deux coniques passent par les sommets d'un carré, ont leur centre à l'origine et leurs foyers en M, N; elles sont donc homofocales. Quand $2c^2 > r^2$, le point P est à l'extérieur du cercle (3). Les foyers des hyperboles équilatères décrivent l'ellipse (6); par contre, ils décrivent l'hyperbole (7) si $2c^2 < r^2$.

Note. — Solution analytique de M. Albert Isay, élève du lycée de Nancy.

M. J.-B. Pomey a envoyé une excellente solution géométrique. Nous en avons d'ailleurs déjà publié une dans le Tome précédent.