

J. GRIESS

Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École normale en 1880

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 120-127

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__120_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS
D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1880;**

PAR M. J. GRIESS,

Maître répétiteur au lycée d'Alger (1)

Étant donné un paraboloïde hyperbolique, on considère une génératrice rectiligne A de cette surface et la génératrice B du même système qui est perpendiculaire à la première; par les points a et b où ces droites sont rencontrées par leur perpendiculaire commune passent deux génératrices rectilignes A' et B' de l'autre système; soient a' et b' les points où les deux droites A' et B' sont rencontrées par leur perpendiculaire commune.

1° *Trouver le lieu des points a et b, et celui des points a' et b', quand la droite A décrit le paraboloïde.*

2° *Trouver le lieu du point de rencontre des droites A et B' ou A' et B.*

3° *Calculer le rapport des longueurs a'b' et ab des*

(1) Classé le vingt-cinquième au concours d'admission

perpendiculaires communes, et étudier la variation de ces longueurs.

Je prends l'équation du paraboloïde sous la forme

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x.$$

Une génératrice A aura pour équations

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2x}{\lambda}; \end{cases}$$

une génératrice B du même système sera

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda', \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2x}{\lambda'}. \end{cases}$$

Ces deux génératrices seront perpendiculaires si l'on a

$$(1) \quad \lambda\lambda' + p + q = 0.$$

Le point a où la perpendiculaire commune à ces deux génératrices rencontre A est défini par les équations (A) et par celle d'un plan mené par B perpendiculairement sur A. Un plan passant par B a pour équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \lambda' + k \left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\lambda'} \right) = 0$$

ou bien

$$-\frac{2k}{\lambda'}x + \frac{1+k}{\sqrt{p}}y + \frac{k-1}{\sqrt{q}}z - \lambda' = 0;$$

il sera perpendiculaire à A si

$$\frac{-\frac{2k}{\lambda'}}{\frac{\lambda}{\sqrt{q}}} = \frac{\frac{k+1}{\sqrt{p}}}{\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}} = \frac{\frac{k-1}{\sqrt{q}}}{1},$$

ou bien

$$-\frac{2k}{\lambda\lambda'} = \frac{k+1}{p} = \frac{k-1}{q} = \frac{2k}{p+q} = \frac{2}{p-q},$$

d'où

$$k = \frac{p+q}{p-q}.$$

Le plan proposé a donc pour équation

$$2) \quad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \lambda' + \frac{p+q}{p-q} \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\lambda'} \right) = 0.$$

En se servant des équations de A, celle-ci peut s'écrire

$$\lambda - \lambda' + \frac{p+q}{p-q} \left(\frac{2x}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda'} \right) = 0$$

ou bien

$$\lambda - \lambda' + 2x \frac{p+q}{p-q} \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = 0.$$

Divisant par $\lambda - \lambda'$ et remplaçant $\lambda\lambda'$ par $-(p+q)$, il vient pour l'équation du lieu

$$x + \frac{p-q}{2} = 0.$$

Cette équation, jointe à celle du paraboloïde, montre que le lieu des points a est une hyperbole dont le plan est perpendiculaire à l'axe du paraboloïde. On voit d'ailleurs que c'est aussi le lieu des points b , car tous les calculs sont symétriques en λ et λ' .

Je remarque que cette hyperbole est aussi le lieu des points du paraboloïde où les génératrices sont perpendi-

culaires. On aurait pu le prévoir. Si je mène en effet par B un plan perpendiculaire à A, ce plan coupera le plan tangent en a suivant une droite passant par a , perpendiculaire à A et rencontrant B. C'est donc une génératrice du parabolôide. Donc, en a , les génératrices sont rectangulaires.

Cette remarque nous permet d'écrire immédiatement les équations des génératrices A' et B'.

Celles de A' sont

$$(A') \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2x}{\mu}, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \mu, \end{cases}$$

et A' sera perpendiculaire à A si $\lambda\mu + p - q = 0$.

De même celles de B' seront

$$(B') \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2x}{\mu'}, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \mu', \end{cases}$$

avec la condition $\lambda'\mu' + p - q = 0$.

Pour trouver le point a' , je mènerai par B' un premier plan parallèle à A' : c'est évidemment le plan

$$(3) \quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \mu' = 0;$$

puis un second plan perpendiculaire à ce dernier.

Un pareil plan a une équation de la forme

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \mu' + k \left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\mu'} \right) = 0,$$

ou bien

$$(4) \quad -\frac{2k}{\mu'} x + \frac{1+k}{\sqrt{p}} y + \frac{1-k}{\sqrt{q}} z - \mu' = 0;$$

(124)

il sera perpendiculaire au plan (3) si

$$\frac{1+k}{p} + \frac{1-k}{q} = 0$$

ou

$$k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = -\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right), \quad k = \frac{p+q}{p-q}.$$

Le plan (4) a donc pour équation

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \mu' + \frac{p+q}{p-q} \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\mu'} \right) = 0.$$

Le point α' se trouve à l'intersection de A' avec ce plan.
Son équation s'écrit, en se servant de A' ,

$$\mu - \mu' + \frac{p+q}{p-q} 2x \frac{\mu' - \mu}{\mu\mu'} = 0,$$

ou, en divisant par $\mu - \mu'$,

$$1 - \frac{p+q}{p-q} 2x \frac{1}{\mu\mu'} = 0.$$

Multiplions entre elles les deux conditions

$$\lambda\mu + p - q = 0, \quad \lambda'\mu' + p - q = 0;$$

il vient

$$\lambda\lambda'\mu\mu' = (p - q)^2.$$

Or

$$\lambda\lambda' = -(p + q);$$

donc

$$\mu\mu' = -\frac{(p - q)^2}{p + q},$$

et l'équation du lieu est

$$1 + 2x \frac{p+q}{p-q} \frac{(p+q)}{(p-q)^2} = 0,$$

$$2 + \frac{(p-q)^3}{2(p+q)^2} = 0.$$

Cette équation, jointe à celle du paraboloïde, montre que ce lieu représente encore une hyperbole dont le plan est perpendiculaire à l'axe.

Cherchons maintenant le point de rencontre des droites A et B'. Pour cela prenons l'équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \mu',$$

avec la condition $\lambda'\mu' + p - q = 0$.

Les équations de A donnent

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda,$$

avec

$$\lambda\lambda' + p + q = 0,$$

d'où

$$\frac{\mu'}{\lambda} = + \frac{p - q}{p + q}$$

ou

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} \right) (p + q) = \left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} \right) (p - q),$$

ce qui s'écrit

$$2y \frac{q}{\sqrt{p}} = -2z \frac{p}{\sqrt{q}} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{p\sqrt{p}} + \frac{z}{q\sqrt{q}} = 0.$$

Ce plan coupe le paraboloïde suivant une parabole qui est le lieu.

On voit d'ailleurs qu'en opérant avec A' et B on obtiendrait le même lieu.

Pour calculer les longueurs ab et $a'b'$, il me suffira de prendre les plus courtes distances des projections des génératrices sur le plan des yz ; car les plans directeurs auxquels les génératrices sont parallèles sont perpendiculaires au plan des yz .

Pour avoir ab , je prendrai la distance du point ($z=0$,

$y = \lambda\sqrt{p}$) à la génératrice $\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \lambda' = 0$; c'est

$$\frac{\lambda - \lambda'}{\sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}} = (\lambda - \lambda') \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p+q}}.$$

De même, pour avoir $a'b'$, je prends la distance du point ($z = 0, y = \mu\sqrt{p}$) à la droite $\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \mu' = 0$, ce qui donne

$$\frac{(\mu - \mu')\sqrt{pq}}{\sqrt{p+q}}.$$

Le rapport est donc

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{\lambda - \lambda'}{\mu - \mu'}.$$

Or

$$\mu = -\frac{p-q}{\lambda}, \quad \mu' = -\frac{p-q}{\lambda'},$$

$$\mu - \mu' = -(p-q) \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right),$$

$$\mu - \mu' = -(p-q) \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = -(p-q) \frac{\lambda - \lambda'}{p+q}.$$

Donc le rapport $\frac{ab}{a'b'}$ est, en valeur absolue,

$$\frac{p+q}{p-q};$$

il est donc constant quand la génératrice **A** se déplace sur le paraboloid.

Comme l'on voit, la variation de ces longueurs ne dépend que de $\lambda - \lambda'$. Or

$$\lambda' = -\frac{p+q}{\lambda};$$

donc

$$\lambda - \lambda' = \lambda + \frac{p+q}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + p + q}{\lambda}.$$

Pour étudier la variation de cette quantité, prenons la dérivée; c'est

$$2\lambda^2 - \lambda^2 - p - q \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - (p + q).$$

Pour $\lambda = \sqrt{p+q}$, la dérivée est nulle; de plus, elle change de signe en passant du négatif au positif, quand λ passe par cette valeur en variant de 0 à $+\infty$; donc la fonction passe par un minimum.

Pour cette valeur de λ , celle de la première longueur est

$$ab = \frac{pq}{p+q} (\lambda - \lambda') = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p+q}} 2\sqrt{p+q} = 2\sqrt{pq}$$

et

$$a'b' = 2\sqrt{pq} \frac{p-q}{p+q}.$$

Note. — La même question a été résolue par M. A. Leinekugel.