Nouvelles annales de mathématiques

A. Macé de Lépinay

Sur un lieu géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 91-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__91_1>

SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. A. MACÉ DE LÉPINAY,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

Par deux points donnés sur une ellipse, on fait passer une circonférence quelconque, puis on mène à ces deux courbes les tangentes communes : lieu du point de rencontre de ces tangentes.

On sait que, si $S = 0$ est l'équation d'une conique, $P = 0$ l'équation d'une droite, $S + \lambda P^2 = 0$ est l'équation générale des coniques bitangentes à la conique $S = 0$, $P = 0$ étant la corde des contacts. On sait, d'autre part, que, si deux coniques sont bitangentes à une troisième, deux des sécantes communes à ces deux coniques passent par le point de rencontre des deux cordes de contact.

Cela posé, rapportons l'ellipse à son centre et à ses axes; son équation sera

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Soit

$$y = mx + n$$

l'équation de la droite qui, par son intersection avec l'ellipse, détermine les deux points donnés, et soient α, β les coordonnées du point de concours de deux tangentes communes à l'ellipse et à l'un des cercles passant par les deux points donnés.

L'équation de l'ensemble de ces deux tangentes communes sera

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) \\ &\qquad - (a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

La corde des contacts du cercle et du système des deux tangentes, devant passer par l'intersection de la corde des contacts $a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 = 0$ et de la droite $y = mx + n$, sera représentée par l'équation

$$(2)\qquad a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 + \lambda(y - mx - n) = 0.$$

Dès lors, l'équation

$$\begin{aligned} &(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) \\ &\quad - (a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2)^2 \\ &\quad + \mu[a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 + \lambda(y - mx - n)]^2 = 0 \end{aligned}$$

représente une conique bitangente au système des deux tangentes communes considéré. Si l'on veut que cette courbe passe par les points donnés sur l'ellipse, il faut que cette équation soit satisfaite si l'on pose en même temps

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0, \quad y - mx - n = 0.$$

Donc $\mu = 1$, et l'équation devient, en développant,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) + 2\lambda(y - mx - n) \\ &\qquad \times (a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2) + \lambda^2(y - mx - n)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous écrivons que cette équation représente un cercle et si, entre les deux équations de condition, nous éliminons λ, nous aurons le lieu cherché. Les conditions sont, en supprimant la solution $\lambda = 0$ qui ne convient pas, et posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &m\lambda = b^2\alpha - ma^2\beta, \\ &c^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) \\ &\quad + 2\lambda(a^2\beta + mb^2\alpha) + (1 - m^2)\lambda^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminant λ, on trouve, en réduisant,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &m^2c^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) \\ &\quad + (1 + m^2)(b^4\alpha^2 - m^2a^4\beta^2) = 0, \end{aligned}\right.$$

ou encore

$$(6)\quad (m^2a^2 + b^2)(b^2\alpha^2 - m^2a^2\beta^2) - m^2a^2b^2c^2 = 0.$$

Sous la forme (5), on voit que le lieu est une conique passant par l'intersection de l'ellipse donnée et des deux droites $b^2x - ma^2y = 0$, $b^2x + ma^2y = 0$, dont la première est le diamètre conjugué à la direction de la corde donnée.

Sous la forme (6), on voit que le lieu est une hyperbole homofocale à l'ellipse proposée; de plus, l'équation (6) étant indépendante de n et ne renfermant m qu'au deuxième degré, on voit que le lieu est le même pour toutes les cordes parallèles à la direction donnée et à la direction symétrique par rapport à l'axe des x. En particulier, on voit que, si la corde devient tangente à l'ellipse, le lieu représenté par l'équation (6) est le lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse donnée et aux cercles tangents à cette ellipse en un point donné.

Si la conique donnée est une hyperbole, le lieu correspondant est l'ellipse

$$(m^2a^2 - b^2)(b^2\alpha^2 + m^2a^2\beta^2) - m^2a^2b^2c^2 = 0,$$

réelle si $m^2a^2 - b^2 > 0$, imaginaire si $m^2a^2 - b^2 < 0$.

La même méthode s'applique au cas de la parabole.