NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Sur un théorème d'Euler concernant la décomposition d'un nombre en quatre cubes positifs

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 89-91

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__89_1>

SUR UN THÉORÈME D'EULER CONCERNANT LA DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN QUATRE CUBES POSITIFS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Euler a démontré qu'un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, est égal à la somme de quatre cubes positifs, entiers ou fractionnaires. On trouve la formule correspondante dans une Note qui termine les *Exercices d'analyse numérique* de Lebesgue. Nous ferons d'abord observer que Lebesgue ne paraît pas avoir deviné la méthode qui a dû servir à Euler pour obtenir cette formule. En effet, il nous paraît évident que celle-ci provient des recherches entreprises par Euler pour la résolution de l'équation indéterminée

$$(1) \qquad x^3 + y^3 = Az^3.$$

L'identité d'Euler est la suivante,

$$n = \left(\frac{n}{6m^2}\right)^3 [(2-a)^3 + a^3(b-1)^3 + b^3(c-1)^3 + c^3],$$

dans laquelle on suppose m tel que l'on ait

$$\frac{n}{12} < m^3 < \frac{n}{6},$$

et, de plus,

$$a = 1 + \frac{6m^3}{n}, \quad b = \frac{2a^3-1}{a^3+1}, \quad c = \frac{2b^3-1}{b^3+1}.$$

Il est fort probable que cette identité provient de l'Arithmétique et non de l'Algèbre, contrairement à la supposition de Lebesgue. En partant des formules qui peuvent servir à la résolution de l'équation (1), on obtient le théorème suivant, dont la première partie complète le théorème d'Euler :

THÉORÈME. — *Un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, est, d'une infinité de manières, le produit ou le quotient de deux nombres formés de la somme de deux cubes positifs.*

En d'autres termes, on peut résoudre d'une infinité de manières, et en nombres rationnels, les deux équations

$$(2) \qquad N = (x^3 + y^3) \times (z^3 + u^3),$$

et

$$(3) \qquad N = (x^3 + y^3) : (z^3 + u^3),$$

N désignant un nombre quelconque.

Parmi les formules en nombre infini qui permettent de résoudre les équations (2) et (3), nous donnerons les deux suivantes, qui fournissent elles-mêmes des solutions en nombre infini.

Pour l'équation (3), on pose $N = 2^\lambda 3^\mu \dfrac{A}{B}$: on choisit $\dfrac{a}{b}$ par les conditions d'inégalité

$$\frac{B}{2^\lambda 3^{\mu-2} A} > \frac{a^3}{b^3} > \frac{B}{2^\lambda 3^{\mu-1} A},$$

et l'on a

$$x = \frac{B b^3}{a}, \quad y = \frac{2^\lambda 3^{\mu-1} A a^3 - B b^3}{a},$$

$$z = \frac{B b^3 - 2^\lambda 3^{\mu-2} A a^3}{b}, \quad u = \frac{2^\lambda 3^{\mu-2} A a^3}{b}.$$

Pour l'équation (2), qui correspond au théorème d'Euler, nous remarquerons que l'on a les deux identités

$$(6LM + L^2 - 3M^2)^3 + (6LM - L^2 + 3M^2)^3$$
$$= 2^2.3^2LM(L^2 + 3M^2)^2,$$
$$(L + M)^3 + (L - M)^3 = 2L(L^2 + 3M^2).$$

Donc, en multipliant membre à membre, et divisant les deux membres de l'égalité obtenue par $(L^2 + 3M^2)^3$, on aura décomposé $2^3.3^2L^2M$ en un produit de deux facteurs égaux à une somme de deux cubes; en supposant, de plus,

$$L = Bb^3, \quad M = 2^{\lambda-3}3^{\mu-2}Aa^3,$$

on aura ainsi décomposé en ce produit le nombre

$$N = 2^\lambda.3^\mu AB^2;$$

on déterminera d'ailleurs le nombre $\frac{a^3}{b^3}$ de telle sorte qu'il rende positifs tous les cubes considérés.