NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. COURBE

Solution d'une question de licence (faculté de Paris, juillet 1879)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 86-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__86_1>

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE

(Faculté de Paris, juillet 1879);

PAR M. H. COURBE.

Étant donné le paraboloïde défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$z = \frac{mx^2 + y^2}{2a},$$

on considère sur cette surface les courbes dont les tangentes font un angle constant donné γ avec l'axe Oz :

1° *Trouver l'équation différentielle des projections de ces courbes sur le plan xOy, et montrer que l'intégration de cette équation se ramène à une quadrature;*

2° *Effectuer la quadrature et construire la projection dans le cas particulier où m est égal à l'unité.*

Les coordonnées d'un point quelconque d'une des courbes considérées étant x, y, z, on doit avoir en chaque point de ces courbes

$$dz = \cos\gamma\, ds,$$

ds étant la différentielle de l'arc, de sorte que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

D'ailleurs, la valeur de dz étant la même pour un point quelconque de la courbe et pour le point correspondant de la surface, on peut éliminer ds et dz entre les deux équations précédentes et la suivante,

$$dz = \frac{mx\,dx + y\,dy}{a},$$

obtenue en différentiant l'équation de la surface; on trouve ainsi

$$mx\,dx + y\,dy = n\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$n = a\cot\gamma.$$

L'équation obtenue, qui ne contient que x, y et leurs différentielles, est l'équation différentielle des projections des courbes considérées sur le plan xOy. On peut la résoudre par rapport à y et, en posant

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

mettre cette équation sous la forme

$$(1) \qquad y = n\frac{\sqrt{1+p^2}}{p} - m\frac{x}{p}.$$

Cette équation différentielle, linéaire par rapport aux variables x et y, peut s'intégrer; en effet, si l'on différentie, on trouve

$$(2) \qquad \frac{dx}{dp} - \frac{m}{p(p^2+m)}x + \frac{n}{p(p^2+m)\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

L'équation (2) est une équation différentielle linéaire du premier ordre; son intégrale est de la forme

$$(3) \qquad x = e^{\int_{p_0}^{p}\frac{m\,dp}{p(p^2+m)}}\left[C - \int_{p_0}^{p} e^{-\int_{p_0}^{p}\frac{m\,dp}{p(p^2+m)}}\frac{n}{p(p^2+m)\sqrt{1+p^2}}\,dp\right].$$

On obtiendra l'intégrale de l'équation (1) en éliminant p entre les équations (1) et (3). La question se ramène donc bien à une seule quadrature, car on obtient sans difficulté $\int_{p_0}^{p} \frac{m\,dp}{p(p^2+m)}$.

Dans le cas particulier où $m=1$, on a à considérer l'équation différentielle

$$x\,dx + y\,dy = n\,ds, \tag{4}$$

ds représentant cette fois la différentielle de l'arc de la projection sur le plan xOy des courbes considérées, de sorte que

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

En intégrant l'équation (4), ce qui donne

$$x^2+y^2 = 2ns + \text{const.},$$

puis, passant aux coordonnées polaires r et θ, on a

$$r^2 = 2ns + \text{const.},$$

et, en différentiant,

$$r\,dr = n\,ds = n\sqrt{r^2\,d\theta^2 + dr^2}.$$

Les variables se séparent aisément, et l'on a à intégrer l'équation

$$n\,d\theta = \pm\frac{\sqrt{r^2-n^2}}{r}\,dr = \pm\left[\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-n^2}} - n^2\frac{dr}{r\sqrt{r^2-n^2}}\right].$$

Si l'on remarque que

$$n^2\frac{dr}{r\sqrt{r^2-n^2}} = -n\frac{d\frac{n}{r}}{\sqrt{1-\left(\frac{n}{r}\right)^2}} = n\,d\arccos\frac{n}{r},$$

on obtient

$$\theta = \pm\frac{1}{n}\sqrt{r^2-n^2} \mp \arccos\frac{n}{r}. \tag{5}$$

La construction de la courbe représentée par l'équation (5) se fait facilement, puisque cette courbe est la *développante du cercle* de rayon $n = a \cot \gamma$.