Nouvelles annales de mathématiques

G. de Longchamps

Sur le centre et le rayon de courbure en un point d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 68-71

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__68_1>

SUR LE CENTRE ET LE RAYON DE COURBURE EN UN POINT D'UNE CONIQUE;

PAR M. G. DE LONGCHAMPS,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycee Charlemagne.

On sait que, si ρ désigne la longueur du rayon de courbure en un point d'une conique, n celle de la normale en ce point, on a

$$\rho = \frac{n^3}{p^2},$$

p désignant le paramètre de la courbe. On déduit de cette formule une construction du centre de courbure; mais on peut, par les considérations très élémentaires et peut-être nouvelles que nous allons donner, arriver à déterminer très simplement le centre et le rayon de courbure en un point d'une conique.

1. Soient M le point de la courbe, AB la tangente en ce point: le cercle osculateur au point M rencontre la conique en un point L, et la droite ML, par une propriété connue, est symétrique de la tangente AB par rapport aux parallèles aux axes menées par M. Soit M′ le point symétrique de M par rapport à Oy; la tangente en M′ sera donc symétrique de AB par rapport à Oy, et par suite

parallèle à ML : le diamètre OM′ passe donc par le milieu K de ML. De cette remarque on déduit la construction suivante :

Soit M *un point d'une conique à centre; la tangente en ce point rencontre l'axe* Ox *en un point* A ; *ayant abaissé du point* M *sur* Ox *la perpendiculaire* MP, *on prend* PA′ = PA ; *la droite* MA′ *rencontre la droite symétrique de* OM, *par rapport à* Ox, *en un point* K, *et le centre de courbure est à l'intersection de la normale en* M *avec la perpendiculaire élevée au point* K *à la droite* MA′.

Cette remarque est en défaut quand le point M est un des sommets de la courbe; mais il existe, pour ces points particuliers, une construction simple et trop connue pour qu'il soit nécessaire de la rappeler ici.

Dans le cas de la parabole, on modifie la règle précédente en prenant le point M′ symétrique du point donné M par rapport à l'axe Ox, et en menant par ce point une parallèle à l'axe; la construction s'achève comme pour les coniques à centre.

2. Nous allons maintenant donner une expression du rayon de courbure qui permet de construire cette ligne par une quatrième proportionnelle. Nous supposerons que la conique proposée est une ellipse ou une hyperbole, nous réservant de faire au sujet de la parabole une remarque particulière.

Appelons α l'angle aigu que fait avec Ox la tangente au point M; ω étant le centre de courbure, le triangle rectangle MKω donne

$$\text{MK} = \rho \sin 2\alpha,$$

ρ étant le rayon de courbure. D'ailleurs, le triangle

MM'K donne [1]

$$\frac{MK}{\sin\beta} = \frac{2x'}{\sin(\alpha+\beta)},$$

β étant l'angle MOx. Cette relation peut s'écrire

$$MK = \frac{2x'}{\sin\alpha\cot\beta + \cos\alpha},$$

et, comme

$$\cot\beta = \frac{x'}{y'},$$

on a

$$\rho = \frac{2x'y'}{x'\sin\alpha + y'\cos\alpha}\,\frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Abaissons du point O la perpendiculaire OH sur AB; on aura

$$OH = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

et, si l'on remarque enfin que

$$MA = \frac{y'}{\sin\alpha}, \quad MB = \frac{x'}{\cos\alpha},$$

on arrive à cette expression remarquable du rayon de courbure

$$\rho = \frac{MA.MB}{OH},$$

expression qui peut se traduire par l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Le rayon de courbure en un point d'une conique à centre est une quatrième proportionnelle aux segments comptés sur la tangente depuis le point de contact jusqu'à la rencontre de celle-ci avec les axes et à la distance du centre à la tangente.*

3. Dans le cas de la parabole, les considérations géo-

---

(1) x', y' désignent, dans ce qui suit, les coordonnées du point M.

métriques que nous venons d'appliquer conduisent à l'expression

$$\rho = \frac{\mathrm{MA}}{\sin\alpha \cos\alpha},$$

dans laquelle MA est la longueur de la tangente comptée depuis le point de contact M jusqu'à la rencontre de celle-ci avec l'axe de la courbe, et α l'angle aigu de la tangente avec Ox. Des considérations évidentes conduisent à la propriété suivante :

THÉORÈME. — *La corde interceptée dans la parabole par un cercle osculateur de cette courbe est quadruple de la longueur de la tangente au point de contact du cercle et de la courbe, longueur comptée depuis le point de contact jusqu'à la rencontre de cette tangente avec l'axe de la courbe.*