G. FOURET

Sur les questions 699, 799, 800, 932 et 1316, concernant les cycloïdes et épicycloïdes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 63-68

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__63_0>

SUR LES QUESTIONS 699, 799, 800, 932 ET 1316, CONCERNANT LES CYCLOIDES ET ÉPICYCLOIDES;

PAR M. G. FOURET,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Les questions que je viens de rappeler ont entre elles un lien très intime qu'il m'a paru intéressant de signaler.

L'énoncé de la question 1316 (2^e^ série, t. XVII, p. 336) est le suivant :

On prend sur la tangente à une cycloïde fixe, à partir du point de contact, une longueur proportionnelle au rayon de courbure en ce point : trouver le lieu de l'extrémité de cette longueur, quand la tangente se déplace.

(BARBARIN.)

Le lieu, comme l'a trouvé M. Lez (2^e^ série, t. XVIII, p. 475), est une cycloïde; on voit en outre aisément que c'est toujours une cycloïde allongée. Mais il y a plus : le même lieu, pour une épicycloïde ordinaire, est aussi une épicycloïde allongée. Cette propriété, ainsi généralisée, n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du théorème suivant, qui a fait l'objet de la question 932 (2^e^ série, t. VIII, p. 192) :

Le lieu des sommets des triangles semblables à un triangle donné, construits sur les rayons de courbure d'une épicycloïde (cycloïde) ordinaire et d'un même côté de ces rayons de courbure, est une épicycloïde (cycloïde) allongée ou raccourcie.

M. Moret-Blanc a donné de ce théorème une démonstration géométrique simple et ingénieuse (2e série, t. XIV, p. 71), dont on peut tirer quelques conséquences intéressantes. En conservant les notations de M. Moret-Blanc ([1]), on peut se proposer de trouver, pour chaque position du cercle mobile qui engendre l'épicycloïde donnée E, sur quel lieu doivent se trouver les centres c' des cercles mobiles engendrant les épicycloïdes qui s'en déduisent d'après l'énoncé du théorème, pour que ces épicycloïdes soient semblables entre elles, c'est-à-dire allongées ou raccourcies dans le même rapport.

On trouve aisément l'équation polaire du lieu des points c', en prenant pour pôle le point n de contact des deux cercles générateurs de l'épicycloïde E et pour axe polaire la droite nc joignant ce point de contact au centre du cercle mobile. On obtient ainsi l'équation

$$(1)\quad \rho^2 - 2\frac{\lambda^2 a^2 r^2}{(a+r)^2 - \lambda^2 a^2}\rho\cos\omega - \frac{\lambda^2 a^2 r^2}{(a+r)^2 - \lambda^2 a^2} = 0,$$

dans laquelle ρ et ω désignent les coordonnées polaires d'un point quelconque du lieu, a et r les rayons respectifs on et cn des cercles mobile et fixe servant à engendrer l'épicycloïde E, λ un paramètre positif qui définit le degré d'allongement ou de raccourcissement de la nouvelle épicycloïde, et qui est égal au rapport $\frac{c'm'}{c'n'}$ de la distance du point décrivant au centre du cercle mobile divisé par le rayon de ce cercle, de telle sorte que l'épicycloïde est ordinaire, allongée ou raccourcie suivant que l'on a $\lambda = 1$, $\lambda > 1$, $\lambda < 1$.

On voit immédiatement que l'équation (1) est celle

([1]) Le lecteur est prié de se reporter à l'article de M. Moret-Blanc.

d'un cercle d'un rayon égal à $\frac{\lambda ar(a+r)}{(a+r)^2-\lambda^2 a^2}$, et dont le centre est situé sur nc, à une distance du point n égale à $\frac{\lambda^2 a^2 r^2}{(a+r)^2-\lambda^2 a^2}$. Les cercles correspondant aux diverses valeurs de λ ont pour axe radical commun la perpendiculaire élevée sur le milieu du rayon on.

De la similitude des triangles mnm', cnc', on conclut immédiatement que, pour chaque position de la figure mobile, le lieu des points m' qui décrivent des épicycloïdes semblables est un cercle ayant son centre sur la normale à l'épicycloïde E. Les divers cercles ainsi obtenus pour diverses valeurs de λ ont pour axe radical commun la perpendiculaire abaissée du point o sur la normale à l'épicycloïde E. Les points de cet axe radical, considérés comme sommets de triangles constamment semblables à eux-mêmes et construits sur les rayons de courbure de l'épicycloïde E, décrivent des épicycloïdes ayant un point multiple en O. Le cercle dont les points décrivent des épicycloïdes ordinaires est le cercle Ω décrit sur le rayon de courbure de l'épicycloïde E comme diamètre, car les deux extrémités de ce rayon de courbure décrivent, l'un l'épicycloïde E, l'autre sa développée, qui, comme on le sait, est une épicycloïde semblable. Un point quelconque, pris comme sommet d'un triangle constamment semblable à un triangle donné et ayant pour base le rayon de courbure de l'épicycloïde E, décrira une épicycloïde allongée ou raccourcie, suivant qu'il sera à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle Ω [1].

Cherchons maintenant l'enveloppe des droites menées par les divers points de l'épicycloïde E, de manière à

[1] Ceci explique pourquoi le lieu faisant l'objet de la question 1316 est une cycloïde allongée.

faire un angle constant, dans un sens déterminé, avec les tangentes correspondantes de l'épicycloïde. D'après une construction bien connue, due à Réaumur, le point de contact d'une pareille droite avec son enveloppe est le pied de la perpendiculaire abaissée sur cette droite du centre de courbure de la courbe donnée. En appliquant cette construction à l'épicycloïde E, on voit que les points de l'enveloppe considérée sont les sommets de triangles rectangles constamment semblables à eux-mêmes et ayant pour hypoténuses respectives les rayons de courbure de cette épicycloïde : ces points, pour chaque position du cercle mobile, sont, par conséquent, situés sur le cercle Ω, et l'on en conclut que le lieu qu'ils forment, c'est-à-dire l'enveloppe définie plus haut, est une épicycloïde ordinaire semblable à l'épicycloïde E. La même propriété subsiste pour la cycloïde, dont on déduit de cette manière une cycloïde égale, et l'on a ainsi démontré les deux théorèmes suivants, qui ont fait l'objet des questions 799 et 800 (2e série, t. VI, p. 96) [1] :

L'enveloppe des droites coupant une cycloïde sous un angle constant est une cycloïde égale.

L'enveloppe des droites coupant une épicycloïde sous un angle constant est une épicycloïde semblable [2].

Le théorème énoncé dans la question 932 comprend, comme cas particulier, le suivant :

---

(1) *Voir* également le *Bulletin de la Société philomathique*, 6e série, t. V, p. 91 (année 1865).

(2) M. Rouquet a donné une démonstration de ces théorèmes (2e série, t. VI, p. 380). Elle est exacte en ce qui concerne la cycloïde, mais elle ne l'est pas pour l'épicycloïde ; en se reportant à la figure, il est facile de voir, en effet, que l'égalité des angles OGM et OCP, sur laquelle elle s'appuie, n'a généralement pas lieu.

Le lieu des points qui divisent dans un rapport constant les rayons de courbure d'une épicycloïde ordinaire, est une épicycloïde allongée ou raccourcie.

Ce dernier énoncé peut se transformer, en remarquant qu'il y a proportionnalité entre le rayon de courbure d'une épicycloïde ordinaire et la portion de la normale à cette épicycloïde comprise entre son pied sur la courbe et l'un de ses points de rencontre avec le cercle générateur fixe. On obtient ainsi un nouveau théorème qui s'étend, comme je l'ai déjà montré ailleurs ([1]), à une épicycloïde quelconque, allongée ou raccourcie, et qui peut s'énoncer ainsi :

Le lieu des points qui divisent dans un rapport constant les portions des normales d'une épicycloïde (ordinaire, allongée ou raccourcie) comprises entre leur pied sur la courbe et l'un de leurs points de rencontre avec le cercle générateur fixe est une épicycloïde.

Dans le cas de la cycloïde, le théorème est le suivant :

Le lieu des points qui divisent dans un rapport constant les normales d'une cycloïde (ordinaire, allongée ou raccourcie) est une cycloïde (allongée ou raccourcie).

Comme on sait que les cycloïdes et épicycloïdes, allongées ou raccourcies, ont leurs arcs exprimables en arcs d'ellipse, le théorème que nous venons d'énoncer explique et démontre le suivant (question 699, 2ᵉ série, t. III, p. 141) :

En partageant dans un rapport constant les normales d'une cycloïde quelconque (ordinaire, allongée

---

([1]) *Bulletin de la Société philomathique*, 6ᵉ série, t. V, p. 88.

ou raccourcie), on obtient une courbe dont les arcs sont exprimables en arcs d'ellipse.

(MANNHEIM.)

Une démonstration analytique directe et très simple de cette dernière propriété a été donnée il y a quelques années (2^e série, t. IV, p. 155). On peut l'étendre facilement à la propriété analogue de l'épicycloïde.