WEILL

Sur le cercle qui passe par les pieds des trois normales abaissées d'un point de l'ellipse sur la courbe

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 60-62

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__60_0>

SUR LE CERCLE QUI PASSE PAR LES PIEDS DES TROIS NORMALES ABAISSÉES D'UN POINT DE L'ELLIPSE SUR LA COURBE;

Par M. WEILL.

Appelons x_1, y_1 les coordonnées du point considéré A de l'ellipse. L'équation de l'ellipse étant

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et celle de l'hyperbole équilatère passant par les pieds des normales abaissées du point A étant

$$(a^2 - b^2)xy + b^2y_1x - a^2x_1y = 0,$$

si l'on élimine x entre ces deux équations, on obtient une équation en y du quatrième degré, qui donne les ordonnées du point A et des pieds des trois normales. Cette équation est

$$(1)\quad y^4(a^2 - b^2)^2 + 2b^2y_1(a^2 - b^2)y^3 + \ldots - b^6y_1^2 = 0.$$

Considérons un cercle quelconque, dont l'équation sera

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + C = 0,$$

et éliminons x entre l'équation de l'ellipse et celle du cercle; nous aurons l'équation

$$(2)\quad \begin{aligned} y^4(a^2 - b^2)^2 &+ 4\beta(a^2 - b^2)b^2y^3 + \ldots \\ &+ b^4[(C + a^2)^2 - 4a^2\alpha^2] = 0. \end{aligned}$$

Cela posé, rappelons que le cercle qui passe par les pieds des trois normales passe par le point diamétralement opposé au point A. Donc, si le cercle considéré passe par les pieds des trois normales, les équations (1) et (2) auront respectivement les solutions

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,$$

et

$$-y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,$$

en désignant par y_2, y_3, y_4 les ordonnées des pieds des trois normales.

Dès lors, en formant les sommes des racines dans les équations (1) et (2), et retranchant ces deux sommes, on aura la relation

$$-\frac{2b^2y_1}{a^2-b^2}+\frac{4\beta b^2}{a^2-b^2}=-2y_1,$$

d'où l'on tire

$$\beta=\frac{a^2}{2b^2}y_1,$$

et, par symétrie,

$$\alpha=\frac{b^2}{2a^2}x_1.$$

Considérons maintenant les produits des racines dans les équations (1) et (2), et faisons le quotient de ces deux produits ; nous aurons

$$-\frac{b^6y_1^2}{b^4[(C+a^2)^2-4a^2\alpha^2]}=-1,$$

d'où l'on tire

$$(C+a^2)^2=b^2y_1^2+\frac{b^4}{a^2}x_1^2=b^4,$$

$$C=-(a^2+b^2).$$

L'équation du cercle est donc

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}x_1-\frac{a^2}{b^2}y_1=a^2+b^2.$$

On voit que son centre décrit une ellipse quand le point A se meut sur l'ellipse donnée, et qu'il rencontre suivant un diamètre le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse.

Remarque. — Cherchons les coordonnées du centre G des moyennes distances des pieds des trois normales.

L'équation (1) nous donne

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -\frac{2b^2 y_1}{a^2 - b^2},$$

d'où l'on tire

$$y_2 + y_3 + y_4 = -\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} y_1.$$

Les coordonnées du point G sont donc

$$y' = -\frac{y_1}{3} \frac{a^2 + b^3}{a^2 - b^2},$$

$$x' = \frac{x_1}{3} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

On voit que le symétrique de ce point par rapport au grand axe est situé sur la droite qui joint le point A au centre de l'ellipse.

Quand le point A se meut sur l'ellipse, le point G décrit une ellipse concentrique et homothétique.

En désignant par X, Y les coordonnées du point de concours des hauteurs du triangle formé par les pieds des trois normales, on a

$$X = 3x' - 2\alpha = x_1 \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{b^2}{a^2} x_1 = x_1 \frac{a^4 + b^4}{a^2(a^2 - b^2)},$$

$$Y = -y_1 \frac{a^4 + b^4}{b^2(a^2 - b^2)}.$$

On a donc facilement l'équation de l'ellipse décrite par ce point.