NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. RÉALIS

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 558-562

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__558_1>

CORRESPONDANCE.

Turin, le 1er mars 1880.

Monsieur le Rédacteur,

On attribue généralement à A.-J.-H. Vincent la priorité de la remarque relative à une propriété curieuse que présentent certaines équations irréductibles, lorsqu'on en développe les racines réelles en fraction continue, d'après la méthode de Lagrange. Cette propriété, aujourd'hui très connue par les belles recherches qu'elle a provoquées de la part de M. Lobatto et de M. Serret (1),

(1) *Journal de M. Liouville*, 1re serie, t. IX, p. 177, et t. XV, p. 152. — SERRET, *Algèbre superieure*.

consiste en ce que, dans les équations dont il s'agit, deux ou plusieurs des fractions ainsi obtenues se trouvent terminées par les mêmes quotients incomplets. Dans sa *Note sur la résolution des équations numériques* (¹), Vincent signale cette particularité à l'égard des trois racines de l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$, et il ajoute : « Cette propriété... mériterait peut-être un examen spécial. » C'est le point de départ des travaux mentionnés.

Or il est juste d'ajouter aussi que, bien longtemps avant, la remarque en question avait déjà été faite par l'illustre Legendre, qui en avait fort bien entrevu toute la portée. Permettez-moi une courte citation à ce sujet.

Je me reporte au § XIV de l'*Essai sur la théorie des nombres* (édition de l'an VI, p. 133). Dans cet endroit, après avoir exposé la méthode de Lagrange pour le développement en fraction continue des racines réelles d'une équation d'un degré quelconque, Legendre fait d'abord l'application du procédé à l'équation

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0,$$

sur laquelle il signale expressément (p. 141 et 142) la circonstance de l'identité des quotients terminaux dont il est question. Après quoi on lit (p. 143) :

« Dans cet exemple, il est très remarquable qu'on trouve un rapport entre les trois racines au moyen duquel le développement de la première racine suffit pour donner celui des deux autres. Ce rapport est tel, que, si l'on appelle β une même racine de l'équation

$$z^3 - 3z^2 - 4z - 1 = 0 \quad (^2),$$

(¹) *Journal de M. Liouville*, 1re série, t. I, p. 341.

(²) Deuxième transformée relative au cas de la racine x comprise entre 1 et 2.

celle, par exemple, qui est entre 4 et 5, les trois racines de la proposée seront

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\beta}} = \frac{2\beta + 1}{1 + \beta},$$

$$x_1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\beta}} = \frac{\beta}{2\beta + 1},$$

$$x_2 = -1 - \frac{1}{\beta} = -\frac{1 + \beta}{\beta},$$

ou, si l'on appelle α la première valeur de x, les deux autres seront

$$x_1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha - 1}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha},$$

$$x_2 = -\frac{1}{\alpha - 1}.$$

» Ces propriétés se vérifieraient aisément par les formules des sinus, puisqu'on a

$$x = 2\cos\frac{1}{7}\pi, \quad x_1 = 2\cos\frac{3}{7}\pi, \quad x_2 = -2\cos\frac{2}{7}\pi, \quad \ldots.$$

» Toutes les équations relatives à la division du cercle sont telles, qu'une de leurs racines suffit pour déterminer rationnellement toutes les autres; mais il en existe une infinité d'autres qui offrent la même facilité, et entre toutes ces équations on doit distinguer surtout celles dont une racine développée en fraction continue suffit pour donner le développement de toutes les autres racines. Cet objet paraît mériter l'attention des analystes, et il pourrait fournir des résultats intéressants. »

Les expressions sont formelles, comme on voit. Vient ensuite (p. 145, 146) la résolution, par fractions continues, de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$, dont les racines possèdent la propriété rappelée. Cette équation appartient directement à la classe étudiée par M. Lobatto, dont elle constitue le cas le plus simple.

Le passage que je viens de rapporter, reproduit dans les éditions subséquentes de la *Théorie des nombres,* ne paraît pas avoir été remarqué. La raison en doit être cherchée probablement en ce qu'un Ouvrage d'une telle portée, et dont la lecture exige au préalable une connaissance approfondie de l'Analyse algébrique, n'est pas consulté ordinairement dans le but d'y trouver une théorie passée depuis longtemps dans l'enseignement classique et consignée dans la plupart des Traités didactiques. Je ne m'arrête pas à la supposition que l'illustre auteur ait été devancé dans quelque publication antérieure, demeurée dans l'oubli.

D'après cela, Monsieur, il me semble établi que c'est bien décidément à Legendre que l'on doit la première remarque du fait analytique dont il s'agit. Cette observation, je dois le dire, n'aurait pas de raison d'être, si ce n'était la circonstance des importants travaux ultérieurs auxquels l'étude du fait signalé a donné naissance.

J'ignore si cette même observation a déjà été produite explicitement; elle est sans doute superflue pour les géomètres à qui les documents originaux et les travaux des maîtres sont familiers; mais il n'en est peut-être pas ainsi à l'égard de la généralité des lecteurs. Quelques expressions d'un article bibliographique des *Nouvelles Annales* (1) n'ont pas contribué, d'ailleurs, à rétablir la vérité historique sur le point en question. C'est ce qui m'a décidé à vous adresser cette Lettre, dont le contenu,

(1) 1re série, t. XIV, p. 407.

si cela vous semble opportun, pourrait être porté à la connaissance de vos lecteurs.

Agréez, monsieur le Rédacteur, l'expression de mes sentiments les plus respectueux et dévoués.

S. Réalis.