E. AMIGUES

Recherches sur deux modes de transformation des figures solides

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 481-492

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__481_0>

RECHERCHES SUR DEUX MODES DE TRANSFORMATION DES FIGURES SOLIDES;

Par M. E. AMIGUES,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

[SUITE ET FIN (1).]

Théorème X. — *Inversement, dans tout système de transformation où les plans correspondants divisent les arêtes de même nom de deux tétraèdres dans des rapports réciproques, les plans de l'infini se correspondent.*

Par hypothèse on a

$$\frac{BM}{AM} \times \frac{B'M'}{A'M'} = +1.$$

Or, pour le plan de l'infini de la figure ABC, on a

$$\frac{BM}{AM} = -1.$$

On doit donc conclure que

$$\frac{B'M'}{A'M'} = -1.$$

Donc le plan de l'infini a pour correspondant le plan de l'infini

18. Théorème XI. — *Dans une quartique de Steiner, considérons un des quatre plans tangents doubles et le plan tangent qui lui est parallèle, puis menons entre les*

---

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIX, p. 433.

deux un troisième plan qui leur soit parallèle et dont la distance au second soit double de la distance au premier. Ce troisième plan, et les trois plans qui lui sont analogues, se coupent en un même point.

Dans la figure ABCD, prenons un point quelconque défini par les équations

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c} = \frac{T}{d}.$$

Tout plan passant par ce point a pour équation

$$(dX - aT) + m(dY - bT) + n(dZ - cT) = 0,$$

ou bien

$$dX + mdY + ndZ - (a + bm + cn)T = 0.$$

Le plan correspondant de l'autre figure a pour équation

$$(28) \quad \frac{X'}{\lambda d} + \frac{Y'}{\mu md} + \frac{Z'}{\nu nd} + \frac{T'}{-\rho(a + bm + cn)} = 0.$$

Lorsque m et n varient, ce plan enveloppe une quartique de Steiner doublement tangente aux quatre faces du tétraèdre A'B'C'D'.

Cherchons le plan tangent simple qui est parallèle à la face A'B'C'. Pour cela, identifions l'équation (28) avec l'équation générale des plans parallèles à la face A'B'C', c'est-à-dire avec l'équation

$$(29) \qquad A'X' + B'Y' + C'Z' + D'T' + KT' = 0;$$

on a ainsi :

$$\lambda dA' = \mu mdB' = \nu ndC' = -\rho(a + bm + cn)(D' + K).$$

On tire de là

$$m = \frac{\lambda A'}{\mu B'} \quad \text{et} \quad n = \frac{\lambda A'}{\nu C'},$$

et, par suite,

$$D' + K = \frac{-\lambda d A'}{\rho\left(a + \frac{b\lambda A'}{\mu B'} + \frac{c\lambda A'}{\nu C'}\right)},$$

$$D' + K = \frac{-d}{\rho\left(\frac{a}{\lambda A'} + \frac{b}{\lambda B'} + \frac{c}{\lambda C'}\right)}.$$

L'équation (29) devient ainsi

$$A'X' + B'Y' + C'Z' - \frac{dT'}{\rho\left(\frac{a}{\lambda A'} + \frac{b}{\mu B'} + \frac{c}{\nu C'}\right)} = 0,$$

et elle représente le plan tangent simple parallèle à la face $A'B'C'$.

On a, d'ailleurs, la relation générale

$$A'X' + B'Y' + C'Z' + D'T' = 3V',$$

V' étant le volume du tétraèdre $A'B'C'D'$.

Retranchant membre à membre les deux dernières équations, on a

$$D'T' = 3V' \frac{\left(\frac{a}{\lambda A'} + \frac{b}{\mu B'} + \frac{c}{\nu C'}\right)}{\sum \frac{a}{\lambda A'}},$$

ou bien, en remplaçant a, b, c, d par les quantités proportionnelles X, Y, Z, T,

$$D'T' = 3V' \frac{\frac{X}{\lambda A'} + \frac{X}{\mu B'} + \frac{Z}{\nu C'}}{\sum \frac{X}{\lambda A'}}.$$

Telle est la distance T' du plan tangent simple parallèle à la face $A'B'C'$ au plan même de cette face, dans la quartique de Steiner qui correspond au point (X, Y, Z, T).

Pour le plan de notre énoncé, la valeur de T′ est trois fois plus faible et l'on a

$$(30) \qquad D'T' = V' \frac{\frac{X}{\lambda A'} + \frac{Y}{\mu B'} + \frac{Z}{\nu C'}}{\sum \frac{X}{\lambda A'}}.$$

On aura de même les distances X′, Y′, Z′ pour les trois plans analogues.

Pour que ces quatre plans se coupent en un même point, il faut et il suffit que l'on ait

$$A'X' + B'Y' + C'Z' + D'T' = 3V'.$$

Or, il est évident que la valeur de T′ et les trois valeurs analogues satisfont à cette condition.

Le point d'intersection des quatre plans considérés a des propriétés remarquables. Nous l'appellerons *point central* de la quartique, parce qu'à certains égards il joue le rôle du centre dans les coniques.

19. Quand le point (X, Y, Z, T) se déplace, la quartique de Steiner se déforme et son point central (X′, Y′, Z′, T′) est variable. Or, d'après la formule (30) et les analogues, il est visible que les points (X, Y, Z, T) et (X′, Y′, Z′ T′) décrivent des figures homographiques.

D'après cela, si le point (X, Y, Z, T) décrit une surface de classe m et d'ordre p, la quartique de Steiner qui lui correspond a pour enveloppe de première classe une surface de classe $3m$, tangente $2m$ fois aux plans tangents doubles de la quartique, et le point central de la quartique décrit une surface de classe m et d'ordre p.

De là le théorème suivant :

Théorème XII. — *Quand une quartique de Steiner a ses quatre plans tangents doubles invariables et reste tangente à une surface de classe* $3m$, *tangente elle-*

même $2m$ fois aux plans tangents doubles de la quartique, le point central de la quartique décrit une surface de classe m.

Cas particuliers :

1° $m = 0$. Si une quartique de Steiner a ses quatre plans tangents doubles invariables et reste tangente à un cinquième plan fixe, son point central décrit un plan. Ce théorème est analogue à celui de Newton sur le lieu du centre d'une conique inscrite à un triangle et tangente à une quatrième droite.

2° $m = 1$. Si une quartique de Steiner a ses quatre plans tangents doubles invariables et reste tangente à une quartique de Steiner donnée ayant les mêmes plans tangents doubles, le point central de la quartique variable reste immobile.

3° Pour $m = 2$, le point central décrit une quadrique.

On peut combiner ces divers théorèmes deux à deux, on aura ainsi des théorèmes complexes, d'après lesquels le point central devra décrire certaines lignes.

20. Nous avons vu qu'à un point quelconque H de la figure ABCD correspond dans l'autre figure une quartique de Steiner et que le point central H' de cette quartique est lié au point H, de telle manière que ces deux points décrivent des figures homographiques. Il est intéressant de se demander dans quel cas les plans à l'infini se correspondent dans ces deux figures homographiques.

Théorème XIII. — *Pour que les plans de l'infini se correspondent dans les figures* H *et* H', *il faut et il suffit que les plans de l'infini se correspondent dans la transformation définie par les relations* (12).

D'après la formule (30), au plan de l'infini de la figure H' correspond dans la figure H le plan qui a pour équation

$$\frac{X}{\lambda A'} + \frac{Y}{\mu B'} + \frac{Z}{\nu C'} + \frac{T}{\rho D'} = 0.$$

Donc, pour que les plans de l'infini se correspondent dans les figures H et H', il faut et il suffit que ce dernier plan coïncide avec le plan dont l'équation est

$$AX + BY + CZ + DT = 0,$$

c'est-à-dire que les conditions nécessaires et suffisantes sont

$$\lambda AA' = \mu BB' = \nu CC' = \rho DD',$$

ce qui prouve que le théorème actuel est une conséquence du théorème VIII.

21. On connaît les propriétés de ces figures homographiques où les plans de l'infini se correspondent.

Et d'abord, à des plans parallèles de la figure H correspondent des plans parallèles de la figure H'; et à des droites parallèles d'autres droites parallèles.

D'autre part, les volumes correspondants des figures H et H' sont dans un rapport constant. C'est ce que M. Chasles a établi dans son *Mémoire sur l'homographie*. Nous avons depuis déduit ce théorème du calcul des déterminants, et nous avons donné la valeur du rapport sous forme de déterminant (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1873).

Pour calculer le rapport des volumes correspondants, au lieu de nous servir du déterminant dont nous venons de parler, nous prendrons deux volumes correspondants simples et nous calculerons directement leur rapport.

Remarquons pour cela que la formule (30), dans le cas actuel, peut s'écrire

$$(31) \qquad D'T' = V' \frac{AX + BY + CZ}{\Sigma AX},$$

ou encore

$$(32)\qquad D'T' = \frac{V'}{3V}(3V - DT).$$

Par conséquent, à tous les points du plan ABC ($T = 0$) de la figure H correspondent dans la figure H′ tous les points du plan

$$D'T' = V',$$

plan qui est parallèle à la face $A'B'C'$ et qui coupe la hauteur abaissée du point D′ sur cette face, de façon que le segment situé du côté du pied est le tiers de la hauteur totale.

Soient alors α', β', γ', δ' les centres de gravité des faces dont les aires sont A′, B′, C′, D′. Il est visible que les faces de même nom des tétraèdres ABCD et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ se correspondent dans ces figures homographiques H et H′; par où l'on voit que, si U′ et U désignent deux volumes correspondants quelconques dans les figures homographiques H′ et H, on a nécessairement

$$\frac{U'}{U} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}{ABCD}.$$

Or, ce dernier rapport est facile à trouver. Car le tétraèdre $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ est semblable au tétraèdre $A'B'C'D'$ et à ses dimensions trois fois plus petites, de sorte que l'on a

$$\alpha'\beta'\gamma'\delta = \frac{1}{27}A'B'C'D'.$$

On a donc enfin

$$\frac{U'}{U} = \frac{1}{27}\frac{A'B'C'D'}{ABCD}.$$

22. Au lieu de chercher dans quel cas les plans de l'infini se correspondent dans les figures homographiques H et H′, on peut se demander dans quel cas ces figures sont semblables.

Nous allons voir tout d'abord que le second cas n'est qu'une particularité du premier. En effet, si deux figures homographiques sont semblables, à des plans parallèles de l'une correspondent toujours dans l'autre des plans parallèles. Donc les plans de l'infini se correspondent.

Mais ce n'est pas tout. Le tétraèdre ABCD, homographique du tétraèdre $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, doit être semblable à ce dernier et par suite au tétraèdre $A'B'C'D'$.

Ainsi, pour que les figures H et H' soient semblables, il est nécessaire: 1° que les plans de l'infini s'y correspondent; 2° que les deux tétraèdres ABCD et $A'B'C'D'$ soient semblables. Nous allons prouver que ces conditions sont suffisantes; et pour cela nous ferons voir que, si ces conditions sont remplies, la distance de deux points quelconques de la figure H est dans un rapport constant avec la distance des points correspondants de la figure H'.

Soient X_1, Y_1, Z_1, T_1 et X_2, Y_2, Z_2, T_2 les coordonnées de deux points quelconques dans la figure H. Désignons par d leur distance. Posons, pour abréger,

$$M = \frac{81\,(A + B + C + D)^2 V^4}{4A^2B^2C^2D^2}.$$

On voit immédiatement que M est une fonction homogène de degré 0 par rapport aux longueurs des arêtes du tétraèdre ABCD.

On a la formule

$$M d^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos XY & \cos XZ & \cos XT & 1 & X_2 - X_1 \\ \cos YX & 1 & \cos YZ & \cos YT & 1 & Y_2 - Y_1 \\ \cos ZX & \cos ZY & 1 & \cos ZT & 1 & Z^2 - Z_1 \\ \cos TX & \cos TY & \cos TZ & 1 & 1 & T_2 - T_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & Z_2 - Z_1 & T_2 - T_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

(PAINVIN.)

Cette formule peut s'écrire

$$(33)\quad Md^2 = \Sigma\xi(X_2 - X_1)^2 + 2\Sigma(\xi, \eta)(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1),$$

les coefficients ξ, (ξ, η) et les analogues étant fonctions des angles des faces seulement.

Considérons maintenant les points de la figure H′, qui correspondent aux points (X_1, Y_1, Z_1, T_1) et (X_2, Y_2, Z_2, T_2) de la figure H; et soient (X'_1, Y'_1, Z'_1, T'_1) et (X'_2, Y'_2, Z'_2, T'_2) les coordonnées de ces deux points. Désignons par d' la distance de ces deux nouveaux points et constatons que les quantités M, ξ, (ξ, η), ... sont les mêmes dans la figure H′ que dans la figure H, attendu que les tétraèdres ABCD et A′B′C′D′ sont supposés semblables. Nous avons donc

$$(34)\quad Md'^2 = \Sigma\xi(X'_2 - X'_1)^2 + 2\Sigma(\xi, \eta)(X'_2 - X'_1)(Y'_2 - Y'_1).$$

D'autre part, en vertu de la formule

$$D'T' = \frac{V'}{3V}(3V - DT),$$

qui a lieu toutes les fois que les plans de l'infini se correspondent dans les figures H et H′, on obtient sans peine

$$(35)\qquad D'(T'_2 - T'_1) = -\frac{V'}{3V}D(T_2 - T_1).$$

Les tétraèdres ABCD et A′B′C′D′ étant semblables, posons

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{m},$$

d'où

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{m^3} \quad \text{et} \quad \frac{D'}{D} = \frac{1}{m^2}.$$

La formule (35) s'écrit alors

$$(36)\qquad T'_2 - T'_1 = -\frac{1}{3m}(T_2 - T_1).$$

En vertu de la formule (36) et des formules analogues, la formule (34) s'écrit

$$(37)\quad 9m^2 M d'^2 = \Sigma\xi(X_2 - X_1)^2 + 2\Sigma(\xi,\eta)(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1);$$

divisant, membre à membre, (37) par (33) et prenant la racine carrée,

$$\frac{d'}{d} = \frac{1}{3}\frac{1}{m}.$$

Ainsi les figures H′ et H sont semblables, et le rapport de similitude est

$$\frac{1}{3}\frac{1}{m}.$$

Les points α', β', γ', δ', qui en général sont homographiques des points A, B, C, D, sont, dans ce cas particulier de la similitude, les homologues de ces points.

Si les tétraèdres semblables ABCD et A′B′C′D′ ont leurs faces de même nom parallèles, il en est de même des tétraèdres semblables et homologues ABCD et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, et alors les deux figures H et H′ sont non seulement semblables, mais homothétiques. Le centre d'homothétie est un point commun aux droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$, $D\delta'$, qui joignent des points homologues.

Si, en particulier, les tétraèdres semblables ABCD et A′B′C′D′ sont égaux et confondus, le centre d'homothétie est évidemment le centre de gravité du volume ABCD, et le rapport de similitude de la figure H′ à la figure H est $\frac{1}{3}$.

23. Étant donné maintenant un mode quelconque de transformation où un plan correspond à un plan, on cherchera à voir si les plans correspondants satisfont aux conditions (12), ou, ce qui revient au même, si les rapports dans lesquels les plans correspondants divisent

les arêtes de même nom ont un produit constant, quels que soient les plans correspondants considérés, ou bien enfin si les plans de l'infini se correspondent, ce qui exige que les rapports précédents soient réciproques.

Si l'une de ces conditions est remplie, on sera dans un des cas que nous avons étudiés ; et alors, pour connaître avec précision les lois de la transformation, il n'y aura plus qu'à se demander si le mode de transformation choisi offre quelqu'une des particularités que nous avons signalées.

Donnons un exemple simple. On a un système d'axes ordinaires Ox, Oy, Oz. Au plan variable qui, dans ce système, a pour équation

$$(\mathrm{P}) \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

faisons correspondre le plan variable qui, dans le même système, a pour équation

$$(\mathrm{P}') \qquad \frac{x'}{a+\alpha}+\frac{y'}{b+\beta}+\frac{z}{c+\gamma}=1,$$

α, β, γ étant trois constantes positives et finies.

Il est clair que les plans de l'infini se correspondent. On est donc dans un des modes de transformation étudiés. Examinons ses particularités. Prenons sur Ox, Oy, Oz et dans le sens positif des longueurs OA', OB', OC' égales à α, β, γ. Le tétraèdre $OA'B'C'$ est le tétraèdre de référence pour la figure (P'). Prenons sur Ox, Oy, Oz, dans le sens négatif, des longueurs OA, OB, OC égales à α, β, γ Le tétraèdre $OABC$ est le tétraèdre de référence dans la figure (P).

Comme les plans de l'infini se correspondent, des plans correspondants quelconques divisent les arêtes de même nom dans des rapports réciproques. Enfin, comme les tétraèdres de référence sont homothétiques et égaux, les figures H′ et H sont homothétiques, et le rapport d'homothétie est $\frac{1}{3}$. Le centre d'homothétie est sur chacune des droites qui joint un sommet du tétraèdre ABCD au centre de gravité de la face opposée de l'autre tétraèdre.