NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Questions proposées par M. Moreau

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 450-454

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__450_1>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. MOREAU

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 527);

SOLUTIONS DE M. MORET-BLANC.

Démontrer les formules

$$1+\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2+\ldots=\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma^2(n+1)},$$

$$1-\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2-\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2+\ldots=\cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

$$1-\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n^2-1)}{1^2.2^2}-\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2.2^2.3^2}+\ldots=\frac{\sin n\pi}{n\pi},$$

et indiquer entre quelles limites elles sont exactes.

1° Si l'on développe $(1+x)^{2n}$ par la formule du binôme, le coefficient de x^μ dans ce développement sera

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-\mu+1)}{1\ 2\ldots\mu}$$

ou, en multipliant haut et bas par $\Gamma(2n-\mu+1)$,

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(2n-\mu+1)}.$$

Si l'on développe $(x+1)^{2n}$, le coefficient de $x^{2n-\mu}$ sera de même

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n-\mu+1)\Gamma(\mu+1)}.$$

En posant $2n-\mu=\mu'$, le coefficient de $x^{\mu'}$ sera donc

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(\mu'+1)\Gamma(2n-\mu'+1)}.$$

Si n est fractionnaire, μ sera toujours entier, mais μ' sera fractionnaire, et, comme le coefficient est toujours la même fonction de n et de μ, cette forme subsiste pour les puissances entières ou fractionnaires, pourvu que les exposants successifs de x diffèrent d'une unité. Il en résulte que, si x^n se trouve dans le développement, son coefficient sera

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma^2(n+1)}.$$

Or, ce terme en x^n s'obtient en faisant la somme des produits des termes de même rang dans les développements de $(1+x)^n$ et $(x+1)^n$, ce qui donne le premier membre de la première formule : cette formule est donc démontrée.

Il faut toutefois que $\Gamma(2n+1)$ reste fini et positif, ce qui exige que l'on ait $2n+1>0$ ou $n>-\frac{1}{2}$.

2° Le coefficient de x^μ dans le développement de

$(1 - x^2)^n$ est, en valeur absolue,

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(n-\frac{\mu}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{\mu}{2}} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(n-\frac{\mu}{2}+1\right)}$$

si μ est pair; il est nul si μ est un nombre impair.

On verra, comme précédemment, que cette forme subsiste pour des valeurs fractionnaires de n.

Si $\mu = n$, c'est-à-dire si le développement renferme un terme en x^n, son coefficient sera égal à $\dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, multiplié par une fonction de n qui s'annule pour les valeurs impaires de n et prend les valeurs $+1$ ou -1 pour les valeurs entières paires ou impaires de $\frac{n}{2}$, conditions qui sont remplies par la fonction $\cos\frac{n\pi}{2}$. Le terme en x^n sera donc

$$\cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Mais on l'obtient aussi en faisant la somme des produits des termes de même rang dans les développements de $(x+1)^n$ et $(1-x)^n$, ce qui donne pour coefficient le premier membre de la seconde formule; on a donc

$$1 - \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 - \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2 + \ldots = \cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Il faut toutefois que $\Gamma(n+1)$ reste continu ou que l'on ait $n > -1$.

L'égalité existe évidemment pour toutes les valeurs entières et positives de n; mais ce n'est que par analogie, et en vertu de la continuité, qu'on l'a étendue aux valeurs fractionnaires. Il faut vérifier qu'elle subsiste pour celles-ci.

Soit $n = \frac{1}{2}$. Le second membre de la formule devient

$$\cos\frac{\pi}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{4}\right)},$$

$\log\cos\frac{\pi}{4}$........	$\bar{1},8498450$
$\log\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$........	$\bar{1},9475449$
$-2\log\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$........	$0,0853578$
$\log\cos\frac{\pi}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right)}$...	$\bar{1},8827477$
$\cos\frac{\pi}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right)}$...	$0,763392.$

C'est aussi la valeur que prend le premier membre quand on y fait $n = \frac{1}{2}$.

La formule subsiste donc pour les valeurs fractionnaires de n.

3° Si l'on développe $\left(\frac{1+x}{1+x}\right)^n$ en série ordonnée suivant les puissances de x, il est évident que le coefficient de x^μ sera égal à zéro pour toutes les valeurs entières positives ou négatives de μ, et qu'il se réduira à 1 pour $\mu = 0$.

Or

$$\left(\frac{1+x}{1+x}\right)^n = (x+1)^n(1+x)^{-n},$$

et l'on obtiendra le coefficient de x^n dans ce développement en multipliant les coefficients des termes de même rang dans les développements de $(x+1)^n$ et de $(1+x)^{-n}$

par la formule du binôme, ce qui donne

$$1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1)}{1^2.2^2} - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2.2^2.3^2} + \ldots,$$

valeur qui se réduit à l'unité pour $n = 0$ et à zéro pour toute valeur entière positive ou négative de n; elle est donc égale à

$$(1-n^2)\left(1-\frac{n^2}{4}\right)\left(1-\frac{n^2}{9}\right)\left(1-\frac{n^2}{16}\right)\ldots.$$

Or on a (Serret, *Trigonométrie*, n° 134)

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right)\ldots,$$

d'où, en remplaçant $\frac{m}{2n}$ par n,

$$\frac{\sin n\pi}{n\pi} = (1-n^2)\left(1-\frac{n^2}{4}\right)\left(1-\frac{n^2}{9}\right)\left(1-\frac{n^2}{16}\right)\ldots.$$

Donc

$$1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1)}{1^2.2^2} - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2.2^2.3^2} + \ldots = \frac{\sin n\pi}{n\pi}.$$