Maurice D'Ocagne

Remarque sur un problème d'analyse combinatoire

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 44-46

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__44_1>

REMARQUE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE COMBINATOIRE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève en Mathématiques spéciales au Lycée Fontanes.

Lorsqu'on se propose de trouver le nombre N_m des points d'intersection des diagonales d'un polygone convexe de m côtés, intérieurs à ce polygone, on cherche à lier ce nombre à celui qui lui correspond N_{m-1} pour un polygone de $m-1$ côtes.

Si l'on cherche le rapport $\frac{N_m}{N_{m-1}}$, on sait que l'on trouve $\frac{N_m}{N_{m-1}} = \frac{m}{m-4}$, d'où l'on déduit facilement la formule connue $N_m = C_m^4$.

Mais il est plus facile de trouver la différence $N_m - N_{m-1}$ que le quotient $\frac{N_m}{N_{m-1}}$; on obtient alors

$$\begin{aligned} N_m - N_{m-1} = {} & 1(m-3) + 2(m-4) \\ & + 3(m-5) + \ldots + (m-3)1. \end{aligned}$$

Je me propose de faire voir comment, à l'aide de ce résultat, on peut très facilement arriver à la formule obtenue par la première méthode.

La différence peut s'écrire

$$\begin{aligned} N_m - N_{m-1} = {} & 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-4) + (m-3) \\ & + 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-4) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 1 + 2 + 3 \\ & + 1 + 2 \\ & + 1 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} N_m - N_{m-1} = {} & \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} + \ldots \\ & + \frac{4.3}{1.2} + \frac{3.2}{1.2} + \frac{2.1}{1.2}. \end{aligned}$$

Cette différence est donc égale à la somme des $m-3$ premiers nombres figurés du deuxième ordre du triangle arithmétique de Pascal, elle est, par suite, égale au $(m-3)^{\text{ième}}$ nombre figuré du troisième ordre de ce triangle. Ainsi,

$$N_m - N_{m-1} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$$

ou

$$(1) \qquad N_m - N_{m-1} = C_{m-1}^3.$$

Or, pour $m = 4$, nous avons le quadrilatère, dans lequel les diagonales ne donnent qu'un point d'intersection ; donc

$$N_4 = 1 = C_4^4.$$

Il me suffit maintenant de faire voir que, si la formule est vraie pour un polygone de $m - 1$ côtés, elle est encore vraie pour un polygone de m côtés, c'est-à-dire qu'en supposant $N_{m-1} = C_{m-1}^4$ j'ai $N_m = C_m^4$, ce qui a lieu en effet, car, d'après la formule (1), j'ai

$$N_m = N_{m-1} + C_{m-1}^3 = C_{m-1}^4 + C_{m-1}^3 = C_m^4.$$

Je retrouve donc bien ainsi la formule qu'avait donnée l'autre méthode.