

MAURICE D'OCAGNE

**Remarque sur un problème d'analyse
combinatoire**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 44-46

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19_44_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REMARQUE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE COMBINATOIRE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,

Élève en Mathématiques spéciales au Lycée Fontanes.

Lorsqu'on se propose de trouver le nombre N_m des points d'intersection des diagonales d'un polygone convexe de m côtés, intérieurs à ce polygone, on cherche à lier ce nombre à celui qui lui correspond N_{m-1} pour un polygone de $m - 1$ côtés.

Si l'on cherche le rapport $\frac{N_m}{N_{m-1}}$, on sait que l'on trouve $\frac{N_m}{N_{m-1}} = \frac{m}{m-4}$, d'où l'on déduit facilement la formule connue $N_m = C_m^4$.

Mais il est plus facile de trouver la différence $N_m - N_{m-1}$ que le quotient $\frac{N_m}{N_{m-1}}$; on obtient alors

$$N_m - N_{m-1} = 1(m-3) + 2(m-4) + 3(m-5) + \dots + (m-3)1.$$

Je me propose de faire voir comment, à l'aide de ce résultat, on peut très facilement arriver à la formule obtenue par la première méthode.

La différence peut s'écrire

$$\begin{aligned} N_m - N_{m-1} = & 1 + 2 + 3 + \dots + (m-4) + (m-3) \\ & + 1 + 2 + 3 + \dots + (m-4) \\ & + \dots \dots \dots \\ & + 1 + 2 + 3 \\ & + 1 + 2 \\ & + 1 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} N_m - N_{m-1} = & \frac{1(m-2) + (m-3)}{1.2} + \frac{1(m-3) + (m-4)}{1.2} + \dots \\ & + \frac{4.3}{1.2} + \frac{3.2}{1.2} + \frac{2.1}{1.2}. \end{aligned}$$

Cette différence est donc égale à la somme des $m - 3$ premiers nombres figurés du deuxième ordre du triangle arithmétique de Pascal, elle est, par suite, égale au $(m - 3)^{1\text{eme}}$ nombre figuré du troisième ordre de ce triangle. Ainsi,

$$N_m - N_{m-1} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$$

ou

$$(1) \quad N_m - N_{m-1} = C_{m-1}^3.$$

Or, pour $m = 4$, nous avons le quadrilatère, dans lequel les diagonales ne donnent qu'un point d'intersection ; donc

$$N_4 - 1 = C_4^3.$$

Il me suffit maintenant de faire voir que, si la formule est vraie pour un polygone de $m - 1$ côtés, elle est encore vraie pour un polygone de m côtés, c'est-à-dire qu'en supposant $N_{m-1} = C_{m-1}^3$ j'ai $N_m = C_m^3$, ce qui a lieu en effet, car, d'après la formule (1), j'ai

$$N_m = N_{m-1} + C_{m-1}^3 = C_{m-1}^3 + C_{m-1}^3 = C_m^3.$$

Je retrouve donc bien ainsi la formule qu'avait donnée l'autre méthode.