NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WEILL

Théorèmes sur la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 442-450

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__442_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

THÉORÈMES SUR LA PARABOLE;

PAR M. WEILL.

[FIN (²).]

Le théorème consiste en ceci : si l'on transforme l'équation (1) au moyen de la relation (2), l'équation du quatrième degré ainsi obtenue aura *quatre racines communes avec l'équation* (1), *si elle en a une seule;* cette condition sera remplie, s'il existe entre les coefficients des deux équations de la parabole et de l'autre conique la relation

$$(4) \qquad \Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0,$$

Θ, Δ et Θ' étant les coefficients de l'équation en λ des deux coniques. La relation (4) est ici

$$p^2C^2 + 4pCD - 8BEp + 4AF = 0.$$

(¹) Voir nos *Recherches sur les transformations du second ordre dans les figures planes* (*Nouvelles Annales,* 1877).

(²) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XIX. p. 367 à 378.

On sait, en particulier, que, lorsqu'un cercle passe par le foyer de la parabole, on peut inscrire à ce cercle un triangle circonscrit à la parabole; en appliquant à ce cas les considérations qui précèdent, on arrive à des propriétés fort simples et susceptibles de différents énoncés; nous n'insisterons pas sur cette question.

Reprenons le système des deux coniques dont les équations sont

$$K\alpha\beta - L\gamma^2 = 0, \tag{1}$$

$$\beta(A\alpha + B\gamma) - C\alpha^2 = 0. \tag{2}$$

Nous avons démontré que l'on a ainsi le *système général* de deux coniques telles qu'un triangle soit circonscrit à la première et inscrit à la seconde.

En donnant aux fonctions linéaires α, β, γ diverses valeurs, parmi lesquelles se trouvent en particulier des valeurs constantes pour l'une des trois fonctions, on obtient tous les systèmes possibles de deux coniques jouissant de la propriété énoncée, et l'on est conduit ainsi à un nombre indéfini de propriétés nouvelles des coniques. Nous nous contenterons d'énoncer quelques propriétés auxquelles donnent lieu les systèmes les plus simples.

Considérons une hyperbole équilatère et une parabole ayant pour équations

$$xy - K^2 = 0,$$

$$y^2 - 2px = 0.$$

On peut inscrire dans l'hyperbole une infinité de triangles qui soient circonscrits à la parabole. Considérons l'un de ces triangles, et désignons par x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 les coordonnées des sommets, et par m_1, m_2, m_3 les coefficients angulaires des côtés, on a les relations

$$x_1 x_2 = \frac{-K^2}{m_1}, \quad m_1 m_2 = \frac{p}{2x^2},$$

$$x_2 x_3 = \frac{-K^2}{m_2}, \quad m_2 m_3 = \frac{p}{2x_3},$$

$$x_3 x_1 = \frac{-K^2}{m_3}, \quad m_3 m_1 = \frac{p}{2x_1},$$

$$y_1 = \frac{K^2}{x_1}, \quad y_2 = -m_1 x_1, \quad y_3 = \frac{-p}{2m_1}.$$

On en conclut :

1° Le produit des abscisses des sommets du triangle variable est constant.

2° Le produit des ordonnées est constant.

3° Le produit des coefficients angulaires des côtés est constant.

4° Le centre de gravité du triangle est sur l'axe de la parabole.

5° Le centre du cercle circonscrit décrit une droite parallèle à l'axe de la parabole.

6° Le point de concours des hauteurs est fixe.

7° Les pieds des hauteurs décrivent la *focale à nœud.*

8° L'équation qui donne les ordonnées des trois sommets est

$$y^3 + \lambda y - \frac{K^2 p}{2} = 0,$$

λ étant un paramètre variable. Cette équation permet d'étudier très facilement les propriétés du système.

9° Le triangle formé par les points de contact des côtés avec la parabole se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux paraboles fixes ; son centre de gravité est sur l'axe de la première ; le produit des ordonnées des sommets de ce triangle et le produit des abscisses sont tous deux constants.

10° Les normales aux points de contact des côtés du triangle avec la parabole sont concourantes; le lieu du point de concours de ces normales est une parallèle à l'axe de la parabole.

11° Si d'un point on mène les trois normales à une parabole, on peut construire une parabole tangente aux trois côtés du triangle formé par les pieds des normales et ayant pour sommet le sommet de la première et pour axe la tangente au sommet de la première. Le paramètre de cette parabole est égal à la distance β du point considéré à l'axe de la parabole donnée; donc la parabole dont il s'agit est l'enveloppe de tous les triangles formés par les pieds des normales menées par une série de points situés sur une parallèle à l'axe de la première. Si l'on mène les tangentes à la parabole donnée aux pieds des trois normales, elles forment un triangle dont les sommets décrivent une hyperbole équilatère, ayant pour asymptotes l'axe et la tangente au sommet de la parabole donnée. Cette hyperbole a pour équation

$$xy = \frac{-p\beta}{2}.$$

12° Si d'une série de points, pris sur une parallèle à l'axe d'une série de paraboles ayant même axe et même sommet, mais de paramètre variable, on abaisse des normales sur ces paraboles, on a une série doublement infinie de triangles formés par les pieds des trois normales, et qui sont tous circonscrits à une même parabole ayant pour sommet le sommet des paraboles variables et pour axe la tangente au sommet de ces courbes; le paramètre de cette parabole est égal à la distance de la droite donnée à l'axe des paraboles variables.

13° Si d'une série de points pris sur une parallèle à l'axe d'une parabole on abaisse des normales, la somme des segments paraboliques déterminés par les ordonnées des pieds des trois normales reste constante.

Considérons encore le système formé par une parabole et une hyberbole ayant pour équations

$$y^2 - 2px = 0,$$
$$xy - K^2 = 0.$$

On peut inscrire à la parabole une infinité de triangles circonscrits à l'hyperbole :

Le produit des abscisses des sommets, le produit des ordonnées et le produit des coefficients angulaires des côtés du triangle sont constants. Le centre du cercle circonscrit au triangle décrit une parallèle à l'axe ; ce cercle enveloppe une courbe du troisième degré, telle que le produit de la distance d'un de ses points à une droite par la puissance de ce point par rapport à un cercle fixe est constant. Le centre de gravité du triangle décrit une parabole ayant pour équation

$$y^2 - \frac{2}{3}px = 0.$$

L'équation qui donne les ordonnées des trois sommets est

$$y^3 + \lambda y^2 - 2pK^2 = 0.$$

Les milieux des côtés décrivent une courbe du quatrième degré dont l'équation est très simple : c'est

$$(y^2 - px)^2 + K^2py = 0.$$

Les droites qui joignent les milieux des côtés enveloppent une parabole ayant pour équation

$$x^2 + 8\frac{K^2}{p}y = 0.$$

On a ainsi un triangle qui se déplace en restant inscrit dans une courbe du quatrième degré, et circonscrit à une parabole. Considérons ce triangle dans l'une de ses positions ; un de ses côtés, qui est tangent à la parabole dont nous venons de parler, a une équation de la forme

$$x = my - \frac{2K^2}{mp}.$$

Soient A, B, C les trois sommets du triangle que nous considérons; les trois valeurs de m qui définissent les trois côtés sont données par une équation facile à former et qui est

$$(1) \qquad \left(\lambda + \frac{2p}{m}\right)^2 + K^2 m = 0.$$

Le côté AB rencontre la courbe du quatrième degré en quatre points dont les ordonnées sont données par l'équation

$$(2) \quad y^4 - 2pmy^3 + y^2\left(p^2m^2 + \frac{4K^2}{m}\right) - 3K^2py + \frac{4K^4}{m^2} = 0.$$

Éliminons m entre les équations (1) et (2), nous arriverons à une équation du *douzième degré* en y. Elle admettra pour racines les ordonnées des points A, B, C prises chacune deux fois; donc son premier membre aura pour diviseur le carré du polynôme

$$(3) \qquad 4y^3 + 4\lambda y^2 + \lambda^2 y + pK^2,$$

car ce polynôme égalé à zéro donne les ordonnées des points A, B, C. L'équation du sixième degré, qui restera après suppression de ce facteur, donnera les ordonnées des six points D, E, F, G, H, K, où les côtés du triangle ABC rencontrent encore la courbe du quatrième degré. Ces six racines se partagent en trois groupes de deux; en effet, le côté AB rencontre la courbe du quatrième degré en deux points D, E auxquels correspond un triangle DEL analogue de ABC ; les ordonnées des sommets de ce triangle sont données par l'équation

$$(4)\qquad 4y^3 + 4\lambda' y^2 + \lambda'^2 y + p\mathrm{K}^2 = 0,$$

dans laquelle λ' désigne la seconde racine de l'équation (1) résolue par rapport à λ, en appelant première racine celle qui nous a donné le triangle ABC. Donc l'équation du sixième degré aura deux racines communes avec l'équation (4), et de même avec deux autres équations analogues. Soit λ_1 la valeur de λ qui définit le triangle ABC ; les six points D, E, F, G, H, K donnent lieu à trois autres triangles correspondant à des valeurs de λ données par l'équation

$$(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda + \lambda_1) - 16p\mathrm{K}^2 = 0.$$

Si nous éliminons λ entre cette équation et l'équation (4), nous aurons une équation du neuvième degré dont les racines seront les ordonnées des neuf sommets des trois triangles ; cette équation du neuvième degré, dont le premier membre est évidemment décomposable en un produit de trois facteurs du troisième degré, est aussi décomposable en un produit de deux facteurs, l'un du sixième degré et l'autre du troisième ; le facteur du sixième n'est autre que le produit des facteurs du premier degré correspondant aux six points D, E, F, G, H, K ; donc ce facteur est celui que l'on obtient dans l'équation du douzième degré envisagée plus haut ; quant au second facteur, qui est du troisième degré, il donnera les ordonnées des trois autres sommets des trois triangles. Cette identité remarquable, que nous venons d'obtenir entre un produit de trois facteurs du troisième degré et un produit de deux facteurs, l'un du sixième degré et l'autre du troisième, se présentera chaque fois que l'on aura à envisager un triangle variable circonscrit à une conique et inscrit dans une courbe du quatrième degré.

On peut remarquer que le produit des ordonnées des six points D, E, F, G, H, K reste constant, ainsi que le produit des ordonnées des trois autres sommets des trois triangles.

Nous citerons encore comme exemples simples :

Un triangle circonscrit à la parabole dont l'équation est

$$y^2 = 2px$$

et inscrit dans l'hyperbole dont l'équation est

$$y = Ax^2 + Bx.$$

Un triangle circonscrit à la parabole dont l'équation est

$$y^2 = 2px$$

et inscrit dans l'hyperbole dont l'équation est

$$y = \frac{Ax + B}{Cx}.$$

Un triangle inscrit dans la parabole dont l'équation est

$$y^2 = Kx + C$$

et circonscrit à l'hyperbole dont l'équation est

$$4Bxy + B^2 + 4Cx^2 = 0.$$

Tous ces triangles donnent lieu aux formules

$$x_1 x_2 = \frac{L}{m_1}, \quad m_1 m_2 = \frac{M}{x_2},$$

$$x_2 x_3 = \frac{L}{m_2}, \quad m_2 m_3 = \frac{M}{x_3},$$

$$x_3 x_1 = \frac{L}{m_3}, \quad m_3 m_1 = \frac{M}{x_1}.$$

On déduit de ces formules que le produit des abscisses des sommets et le produit des coefficients angulaires des côtés sont constants.

Nous terminerons par l'énoncé de la propriété suivante :

Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit dans une parabole et circonscrit à une parabole ayant même axe que la première et de paramètre quadruple, la somme des carrés des côtés du triangle reste constante.