NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Questions proposées par M. H. Faure

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 411-421

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__411_1>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. H. FAURE

(voir 2e série, t. XIV, p. 479);

PAR M. MORET-BLANC.

I. *Une surface de second degré étant coupée par un plan* P, *désignons par* D *le diamètre parallèle à la tangente en un point quelconque de la section, par* p *la distance du centre de la surface au plan tangent en ce point et par* α *l'angle que forme ce plan tangent avec le plan* P.

1° *Pour tout point de la section,*

$$\frac{pD}{\sin\alpha} = \text{const}.$$

2° *La constante conserve la même valeur lorsque le* *plan* P *roule sur une surface homofocale à la surface donnée.*

1° Soient

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1 \tag{1}$$

l'équation de la surface et

$$ax + by + cz = d \tag{2}$$

celle du plan sécant, d étant la distance du centre de la surface à ce plan, et a, b, c les cosinus des angles que la normale au plan fait avec les axes.

Les coordonnées des extrémités du diamètre parallèle à la tangente au point (x, y, z) de la section sont données par les équations

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1,$$

$$aX + bY + cZ = 0,$$

$$X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu = 0,$$

λ, μ, ν étant les angles que fait avec les axes la normale à la section au point considéré.

On en tire

$$X^2 = \frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{\frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{A} + \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{B} + \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{C}},$$

$$Y^2 = \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{\frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{A} + \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{B} + \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{C}},$$

$$Z^2 = \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{\frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{A} + \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{B} + \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{C}},$$

et par suite

$$\frac{D^2}{4} = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$= \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2 + (c\cos\lambda - a\cos\nu)^2 + (b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{\frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{A} + \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{B} + \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{C}}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\frac{(b\cos\nu - c\cos\mu)^2}{A} + \frac{(c\cos\lambda - a\cos\nu)^2}{B} + \frac{(a\cos\mu - b\cos\lambda)^2}{C}}.$$

Or,

$$\cos\lambda = p\frac{x}{A}, \quad \cos\mu = p\frac{y}{B}, \quad \cos\nu = p\frac{z}{C},$$

en remplaçant $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ par leurs valeurs, et multipliant haut et bas dans le second membre par $A^2 B^2 C^2$, on a

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{p^2 D^2}{4\sin^2\alpha} \\ &= \frac{A^2B^2C^2}{A(Bbx - Ccy)^2 + B(Ccx - Aaz)^2 + C(Aay - Bbx)^2}. \end{aligned} \right.$$

On tire de l'équation (2)

$$x = \frac{d - by - cz}{a},$$

et, en reportant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$\begin{aligned} &C(Aa^2 + Bb^2)y^2 - 2BCb(d - cz)y \\ &\quad + B(Aa^2 + Cc^2)z^2 - 2BCcdz + BC(d^2 - Ca^2) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$y = \frac{BCab(d - cz) \pm aR}{Ca(Aa^2 + Bb^2)},$$

$$x = \frac{ACa^2(d - cz) \mp bR}{Ca(Aa^2 + Bb^2)}.$$

En portant ces valeurs de x et y dans la relation (3),

z disparaît, et l'on a

$$(4)\qquad \frac{p^2 D^2}{4\sin^2\alpha} = \frac{ABC}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - d^2},$$

ou

$$\frac{pD}{\sin\alpha} = 2\sqrt{\frac{ABC}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - d^2}},$$

valeur constante.

2° Soit

$$\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} = 1$$

l'équation d'une surface homofocale à la surface (1).

On a la relation

$$A - A' = B - B' = C - C'.$$

L'équation du plan tangent à cette surface est

$$\frac{Xx}{A'} + \frac{Yy}{B'} + \frac{Zz}{C'} = 1.$$

On identifiera ce plan avec le plan (2) en posant

$$a = \frac{dx}{A'},\quad b = \frac{dy}{B'},\quad c = \frac{dz}{C'}$$

et

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{A'^2} + \frac{y^2}{B'^2} + \frac{z^2}{C'^2}}}.$$

La relation (3) devient alors

$$\frac{p^2 D^2}{4\sin^2\alpha} = \frac{ABC}{d^2\left(A\frac{x^2}{A'^2} + B\frac{y^2}{B'^2} + C\frac{z^2}{C'^2} - 1\right)}$$

$$= \frac{ABC\left(\frac{x^2}{A'^2} + \frac{y^2}{B'^2} + \frac{z^2}{C'^2}\right)}{A\frac{x^2}{A'^2} + B\frac{y^2}{B'^2} + C\frac{z^2}{C'^2} - \left(\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'}\right)} = \frac{ABC}{A - A'},$$

ou

$$\frac{pD}{\sin\alpha} = 2\sqrt{\frac{ABC}{A - A'}}.$$

Donc la constante ne change pas quand le plan P roule sur une surface homofocale à la surface donnée.

II. *On donne trois surfaces du second degré homofocales. Une droite* ε *touchant les deux premières coupe la troisième* A *au point a. Si le plan tangent au point a rencontre au point m la parallèle* O*m menée à* ε *par le centre* O *de* A, O*m a une longueur constante quelle que soit la droite* ε.

Soient

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

$$\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} = 1,$$

$$\frac{x^2}{A''} + \frac{y^2}{B''} + \frac{z^2}{C''} = 1$$

les équations des trois surfaces, avec les relations

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A' - A = B' - B = C' - C = k \\ A'' - A' = B'' - B' = C'' - C' = k', \end{array} \right.$$

exprimant qu'elles sont homofocales.

Soient

$$x = mz + p,$$

$$y = nz + q$$

les équations de la droite ε. Les conditions pour qu'elle touche les deux premières surfaces sont exprimées par

$$A\,q^2 + B\,p^2 + C\,(mq - np)^2 = B\,C\,m^2 + A\,C\,n^2 + AB,$$

$$A'q^2 + B'p^2 + C'(mq - np)^2 = B'C'm^2 + A'C'n^2 + A'B'.$$

Les coordonnées de ses intersections avec la troisième sont

$$x_1 = \frac{A''(C''m^2p - C''mnq + B''p) \pm mR}{B''C''m^2 + A''C''n^2 + A''B''},$$

$$y_1 = \frac{B''(C''m^2q - C''mnp + A''q) \pm nR}{B''C''m^2 + A''C''n^2 + A''B''},$$

$$z_1 = \frac{-C''(B''mp + A''nq) \pm R}{B''C''m^2 + A''C''n^2 + A''B''},$$

en posant, pour abréger,

$$R = \sqrt{A''B''C''[B''C''m^2 + A''C''n^2 + A''B'' - A''q^2 - B''p^2 - C''(mq - np)^2]}.$$

L'équation du plan tangent à la troisième surface au point (x, y, z) est

$$\frac{x_1}{A''}X + \frac{y_1}{B''}Y + \frac{z_1}{C''}Z = 1,$$

et celles de la parallèle à ε menée par le centre sont

$$X = mZ,$$
$$Y = nZ.$$

On en déduit les coordonnées du point m d'intersection

$$X_1 = \frac{m}{\frac{mx_1}{A''} + \frac{ny_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}},$$

$$Y_1 = \frac{n}{\frac{mx_1}{A''} + \frac{ny_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}},$$

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{mx_1}{A''} + \frac{ny_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}},$$

d'où

$$\begin{aligned}\overline{Om}^2 &= X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2\\ &= \frac{m^2 + n^2 + 1}{\left(\frac{mx_1}{A''} + \frac{ny_1}{B''} + \frac{z_1}{C''}\right)^2}\\ &= \frac{A''^2B''^2C''^2(m^2 + n^2 + 1)}{(B''C''mx_1 + A''C''ny_1 + A''B'')^2}.\end{aligned}$$

et, en remplaçant x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs,

$$\overline{Om}^2 = \frac{A''B''C''(m^2+n^2+1)}{B''C''m^2+A''C''n^2+A''B''-A''q^2-B''p^2-C''(mq-np)^2}.$$

Posons

$$B''C''m^2+A''C''n^2+A''B''-A''q^2-B''p^2-C''(mq-np)^2=S;$$

si l'on résout les trois équations

$$\begin{aligned}
A\ q^2+B\ p^2+C\ (mq-np)^2 &= B\ C\ m^2+A\ C\ n^2+A\ B,\\
A'\ q^2+B'\ p^2+C'\ (mq-np)^2 &= B'\ C'\ m^2+A'\ C'\ n^2+A'\ B',\\
A''q^2+B''p^2+C''(mq-np)^2 &= B''C''m^2+A''C''n^2+A''B''-S,
\end{aligned}$$

par rapport aux variables q^2, p^2 et $(mq-np)^2$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ k & k & k \\ k' & k' & k' \end{vmatrix} = kk' \begin{vmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

donc, puisque p^2, q^2 et $(mq-np)^2$ admettent des valeurs différentes de zéro, il faut que les numérateurs soient nuls, et par suite que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & BCm^2+ACn^2+AB \\ A' & B' & B'C'm^2+A'C'n^2+A'B' \\ A'' & B'' & B''C''m^2+A''C''n^2+A''B''-S \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
S(AB'-BA') = {} & (BCm^2+ACn^2+AB)(A'B''-B'A'')\\
& -(B'C'm^2+A'C'n^2+A'B')(AB''-BA'')\\
& +(B''C''m^2+A''C''n^2+A''B'')(AB'-BA')
\end{aligned}$$

et, en simplifiant au moyen des relations (α),

$$S=(k+k')k'(m^2+n+1)=(A''-A)(A''-A')(m^2+n^2+1).$$

La valeur de $\overline{Om}^2$ devient donc

$$\overline{Om}^2 = \frac{A''B''C''}{(A''-A)(A''-A')}$$

ou

$$Om = \sqrt{\frac{A''B''C''}{(A''-A)(A''-A')}},$$

valeur constante. C. Q. F. D.

III. *Par un point d'une surface du second degré, on mène trois plans rectangulaires* A, B, C. *Si l'on désigne par* α, β, γ *les rayons de courbure des trois sections en ce point, et par* T *le plan tangent en ce même point,*

$$\frac{\sin^3 TA}{\alpha} + \frac{\sin^3 TB}{\beta} + \frac{\sin^3 TC}{\gamma} = \text{const.} \quad (^1).$$

Prenons les trois plans sécants pour plans des coordonnées, et soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z = 0$$

l'équation de la surface.

Celle du plan tangent à l'origine est

$$Cx + C'y + C''z = 0.$$

Les sinus des angles que ce plan fait avec les trois plans A, B, C sont respectivement

$$\frac{\sqrt{C^2+C'^2}}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}, \quad \frac{\sqrt{C^2+C''^2}}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}, \quad \frac{\sqrt{C'^2+C''^2}}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}.$$

En faisant $z = 0$ dans l'équation de la surface, on a

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y = 0,$$

équation de la section faite par le plan A.

---

(1) C'est par erreur que dans l'enoncé les exposants des sinus ont ete affectés du signe —.

On en déduit, pour $x = 0$, $y = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{C}{C'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2B''CC' - (AC'^2 + A'C^2)}{C'^3},$$

et par suite

$$\alpha = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(C^2 + C'^2)^{\frac{3}{2}}}{C'^3(AC'^2 + A'C^2 - 2B''CC')},$$

$$\frac{\sin^3 AT}{\alpha} = \frac{AC'^2 + A'C^2 - 2B''CC'}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On trouve de même

$$\frac{\sin^3 BT}{\beta} = \frac{AC''^2 + A''C^2 - 2B'CC''}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\sin^3 CT}{\gamma} = \frac{A'C''^2 + A''C'^2 - 2BC'C''}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Par suite,

$$\frac{\sin^3 AT}{\alpha} + \frac{\sin^3 BT}{\beta} + \frac{\sin^3 CT}{\gamma} = \frac{(A + A' + A'')(C^2 + C'^2 + C''^2) - (AC^2 + A'C'^2 + A''C''^2 + 2BC'C'' + 2B'CC'' + 2B''CC')}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On sait que, dans la transformation orthogonale, $A + A' + A''$ et $C^2 + C'^2 + C''^2$ sont des invariants; il faut vérifier que

$$AC^2 + A'C'^2 + A''C''^2 + 2BC'C'' + 2B'CC'' + 2B''CC'$$

est aussi un invariant.

Les formules de transformation pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires sont

$$x = ax' + a'y' + a''z',$$
$$y = bx' + b'y' + b''z',$$
$$z = cx' + c'y' + c''z',$$

avec les relations connues

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^2 + a'^2 + a'^2 = 1, & ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{array}\right.$$

En distinguant par l'indice 1 les coefficients de l'équation transformée, on a

$$\begin{aligned}
A_1 &= Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ac + 2B''ab,\\
A'_1 &= Aa'^2 + A'b'^2 + A''c'^2 + 2Bb'c' + 2B'a'c' + 2B''a'b',\\
A''_1 &= Aa''^2 + A'b''^2 + A''c''^2 + 2Bb''c'' + 2B'a''c'' + 2B''a''b'',\\
B_1 &= Aa'a'' + A'b'b'' + A''c'c''\\
&\quad + B(b'c'' + c'b'') + B'(c'a'' + a'c'') + B''(a'b'' + b'a''),\\
B'_1 &= Aaa'' + A'bb'' + A''cc''\\
&\quad + B(bc'' + cb'') + B'(ca'' + ac'') + B''(ab'' + ba''),\\
B''_1 &= Aaa' + A'bb' + A''cc'\\
&\quad + B(bc' + cb') + B'(ca' + ac') + B''(ab' + ba'),\\
C_1 &= Ca + C'b + C''c,\\
C'_1 &= Ca' + C'b' + C''c',\\
C''_1 &= Ca'' + C'b'' + C''c'',
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
C_1^2 &= C^2a^2 + C'^2b^2 + C''^2c^2 + 2CC'ab + 2CC''ac + 2C'C''bc,\\
C_1'^2 &= C^2a'^2 + \ldots,\\
C_1''^2 &= C^2a''^2 + \ldots,\\
C_1C'_1 &= C^2aa' + C'^2bb' + C''^2cc'\\
&\quad + CC'(ab' + ba') + CC''(ac' + ca') + C'C''(ab' + ba'),\\
C_1C''_1 &= C^2aa'' + \ldots,\\
C'_1C''_1 &= C^2a'a'' + \ldots.
\end{aligned}$$

Au moyen de ces valeurs, et en ayant égard aux relations (α), on vérifie que

$$A_1 + A'_1 + A''_1 = A + A' + A'',$$
$$C_1^2 + C'^2_1 + C''^2_1 = C^2 + C'^2 + C''^2,$$
$$A_1 C_1^2 + A'_1 C'^2_1 + A''_1 C''^2_1 + 2 B_1 C'_1 C''_1 + 2 B'_1 C_1 C''_1 + 2 B''_1 C_1 C'_1$$
$$= AC^2 + A'C'^2 + A''C''^2 + 2 BC'C'' + 2 B'CC'' + 2 B''CC'.$$

Cette fonction des coefficients est donc aussi un invariant, ce qui démontre le théorème.