NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WEILL

Théorèmes sur la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 367-378

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__367_1>

THÉORÈMES SUR LA PARABOLE;

PAR M. WEILL.

Avant d'étudier les propriétés dont il s'agit, et qui sont relatives à un triangle qui se déplace en restant inscrit à une conique et circonscrit à une parabole, il est nécessaire de dire quelques mots de l'involution du troisième ordre.

Considérons l'équation

$$t^3 + \lambda t^2 + (A\lambda + B)t + C\lambda + D = 0.$$

Quand λ varie dans cette équation, t prend à chaque instant trois valeurs déterminées; nous dirons que ces trois valeurs forment une involution du troisième ordre.

Considérons deux racines t et t_1 de l'équation, correspondant à une même valeur de λ, on aura la relation

$$\frac{t^3 + Bt + D}{t_1^3 + Bt_1 + D} = \frac{t^2 + At + C}{t_1^2 + At_1 + C},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} 0 = {} & t^2 t_1^2 + A t t_1 (t + t_1) \\ & + C(t^2 + t_1^2) + (C - B) t t_1 - D(t + t_1) + BC - AD. \end{aligned}$$

Si l'on considère les trois valeurs t, t_1. t_2 correspondant à une même valeur de λ, la relation symétrique que nous venons de trouver aura lieu entre deux quelconques d'entre elles, de manière que, si t_1 désigne l'une des valeurs, la fonction symétrique du second degré par rapport à t aura pour racines t et t_2.

Dès lors, tout groupe de trois variables liées entre elles de telle manière qu'à l'une *quelconque* des trois correspondent les deux autres pourra être représenté par une équation du troisième degré dont les coefficients sont des *fonctions linéaires* du paramètre qui définit le groupe considéré.

Ces notions sommaires sur ce sujet important nous suffiront pour ce qui va suivre.

Si l'on considère un triangle qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques, et si les coordonnées d'un sommet sont définies *rationnellement* en fonction d'un paramètre t, les trois valeurs de ce paramètre correspondant à une position du triangle formeront une involution du troisième ordre.

Appliquons cette notion à la parabole, en considérant un triangle variable inscrit dans une conique fixe et circonscrit à la parabole.

Soit

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

l'équation d'une tangente à la parabole; m et m' désignant les coefficients angulaires de deux tangentes, et x, y les coordonnées du point de rencontre, on a

$$x = \frac{p}{2}\frac{1}{mm'}, \quad y = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right).$$

Considérons trois tangentes formant un triangle qui se déplace en restant circonscrit à la parabole et inscrit dans une conique fixe; les points de contact des côtés avec la parabole forment une involution du troisième ordre, et l'on peut prendre la quantité $\frac{1}{m}$ pour définir cette involution. Dès lors, on a la relation

$$\frac{1}{m^3} + \lambda\frac{1}{m^2} + (A\lambda + B)\frac{1}{m} + C\lambda + D = 0.$$

Les coordonnées (X, Y) du centre de gravité du triangle sont données par les relations

$$3X = \frac{p}{2}\sum\frac{1}{mm'} = \frac{p}{2}(A\lambda + B),$$

$$3Y = \frac{p}{2}\sum\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) = -p\lambda.$$

Le lieu du centre de gravité est donc une ligne droite quand λ varie, c'est-à-dire quand le triangle se déplace. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une parabole, son centre de gravité décrit une ligne droite.*

Cette droite, lieu du centre de gravité, forme un faisceau harmonique avec la direction de l'axe de la parabole et les directions asymptotiques de l'autre conique. Pour le démontrer, il suffit de faire une projection perspective, ce qui donne un théorème facile à trouver.

Considérons un triangle qui se déplace en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une parabole, et proposons-nous de calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit.

Désignons par x', y', x'', y'', x''', y''' les coordonnées des points de contact des côtés avec la parabole et par

α', β', α'', β'', α''', β''' celles des sommets du triangle; on aura les relations

$$\left\{\begin{array}{l} y'+y''=2\beta''', \\ y'y''=2p\alpha''', \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y'+y'''=2\beta'', \\ y'y'''=2p\alpha''. \end{array}\right.$$

La perpendiculaire au milieu de l'un des côtés du triangle a pour équation

$$\frac{y-\dfrac{\beta''+\beta'''}{2}}{x-\dfrac{\alpha''+\alpha'''}{2}}=\frac{\alpha''-\alpha'''}{\beta'''-\beta''}.$$

Cette équation devient, quand on y remplace α'', α''', β'', β''' par leurs valeurs et quand on désigne par S la quantité $y'+y''+y'''$,

$$2y-S-y'+\frac{y'}{p}\left[2x-\frac{y'(S-y')}{2p}\right]=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(1)\qquad y'^3-Sy'^2+y'(4px-2p^2)+2p^2(2y-S)=0.$$

En remplaçant y' par y'' et y''', on aurait les équations des perpendiculaires aux milieux des deux autres côtés du triangle; donc l'équation que nous venons d'écrire, si l'on y considère y' comme l'inconnue, admet pour solutions y', y'', y'''; or ces trois ordonnées forment, quand le triangle se déplace, une involution du troisième ordre; on a donc entre elles une équation de la forme suivante

$$(2)\qquad y'^3-Sy'^2+(AS+B)y'+CS+D=0.$$

Cette équation doit être identique avec l'équation (1); on a donc les relations

$$4px-2p^2=AS+B,$$
$$2p^2(2y-S)=CS+D.$$

En éliminant le paramètre S entre ces deux équations, on trouve une ligne droite pour le lieu du centre du cercle circonscrit; on a donc le théorème suivant :

Théorème II. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une parabole, le centre du cercle circonscrit au triangle décrit une ligne droite.*

Le cercle circonscrit passe au foyer de la parabole; il passe donc par un deuxième point fixe. Faisons une projection perspective; nous aurons le théorème suivant :

Théorème III. — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit à une conique* C *et circonscrit à une conique* P, *si l'on considère les coniques passant par les trois sommets du triangle et deux points fixes* I *et* J *situés sur une tangente à la conique* P, *ces coniques passent par deux autres points fixes.*

L'un de ces points fixes est le point F, intersection des tangentes menées des points I et J à la conique P. Pour avoir l'autre point fixe, prolongeons la droite IJ jusqu'aux points où elle rencontre la conique C, et de ces points menons à la conique P deux tangentes qui se rencontrent en un point K de la conique C; la droite FK rencontre la conique C en un deuxième point G : c'est ce point qui est le deuxième point fixe, comme un raisonnement aisé permet de le reconnaître.

De ces remarques on déduit le théorème suivant :

Théorème IV. — *Quand une conique est telle qu'un triangle circonscrit à une parabole soit inscrit à la conique, les tangentes menées à la parabole parallèlement aux asymptotes de la conique se rencontrent en un point* K *de cette courbe. La droite* FK *qui joint le* *foyer de la parabole à ce point* K *rencontre la conique en un deuxième point* G. *Le cercle circonscrit au triangle variable passe par le point* G.

On démontre aisément la réciproque de ces théorèmes, et l'on arrive au résultat que nous allons énoncer :

Théorème V. — *Lorsqu'une conique passe par quatre points fixes* F, I, J, G, *le point* G *étant situé sur une conique fixe* C, *le triangle variable* ABC *formé par les trois points de rencontre de cette conique fixe avec la conique variable reste inscrit et circonscrit à deux coniques fixes* C *et* P. *La conique* P *est tangente à neuf droites remarquables ; ces droites sont :* 1° *les trois côtés du triangle* FIJ ; 2° *les six droites obtenues en joignant respectivement les points de rencontre des côtés de ce triangle avec la conique* C *aux trois points où cette même conique est rencontrée par les droites* GF, GI, GJ (*abstraction faite du point* G).

Le théorème corrélatif est le suivant :

Théorème VI. — *On considère une conique et quatre droites, dont l'une* ABC *est tangente à la conique ; soient* A, B, C, A′, B′, C′ *les six sommets du quadrilatère, les lettres se correspondant sur les diagonales ; les tangentes communes à la conique fixe et à une conique variable tangente aux quatre droites forment un triangle variable qui reste circonscrit à la conique donnée et inscrit dans une conique fixe. Cette dernière conique passe par neuf points remarquables, qui sont les sommets des triangles formés par les tangentes menées à la conique donnée par les couples de points correspondants* (A, A′), (B, B′), (C, C′).

Les théorèmes que nous venons d'établir donnent un grand nombre de théorèmes particuliers. Nous citerons les suivants :

Théorème VII. — *Quand un triangle* ABC *se déplace en restant inscrit à une conique* C *et circonscrit à une conique* P, *si l'on considère la conique inscrite dans le triangle et ayant pour foyer un point fixe de la conique* C, *le deuxième foyer de cette conique variable décrit une droite.*

Considérons une droite, et de chacun des points de cette droite menons des normales à une parabole; le triangle formé par les pieds de ces trois normales forme un système de trois points en involution; donc ses côtés sont tangents à une conique fixe P'.

Considérons le cercle passant par les pieds des normales; ce cercle peut être considéré comme une conique passant par deux points fixes I et J situés sur une tangente à la conique P' et par les sommets d'un triangle en involution sur la conique P; donc le cercle passe par deux autres points fixes; le triangle variable est inscrit dans la parabole P tangente à la droite IJ et circonscrit à la parabole P' tangente à cette même droite. Les deux points fixes dont il s'agit sont le point G, situé sur la parabole P, et qui n'est autre que le sommet de cette courbe, et l'autre est le foyer de la parabole P'. La droite qui joint le sommet de la parabole P au foyer de la parabole P' rencontre la parabole P en un point K; ce point est le sommet d'un *triangle aplati* inscrit dans P et circonscrit à P'; les côtés de ce triangle sont formés par la tangente au point K à la conique P', et cette tangente passe au point de contact de la conique P avec la droite IJ. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si de deux points on mène les trois* *normales à une parabole, les cercles circonscrits aux deux triangles formés par les pieds passent par le sommet* S *de la parabole et par un autre point* F_1; *ce point est le foyer d'une parabole tangente aux six côtés des deux triangles; la droite* F_1S *passe par un point commun aux deux paraboles, et la tangente en ce point à la seconde courbe est parallèle à l'axe de la première.*

Théorème IX. — *Si l'on considère un triangle* ABC *et une parabole, et si l'on mène à la parabole une tangente parallèle au côté* BC *et des tangentes par le point* A, *les sommets des trois triangles obtenus en faisant cette construction relativement aux trois sommets du triangle* ABC, *sont neuf points sur une même conique.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de reprendre le théorème VI en supposant que la tangente fixe soit la droite de l'infini.

Quand l'un des côtés du triangle ABC est tangent à la parabole, la conique dégénère en deux droites.

Reprenons l'étude d'un triangle qui se déplace en restant inscrit dans une conique quelconque et circonscrit à une parabole. Nous avons démontré que le point O, centre du cercle circonscrit au triangle, décrit une droite L, et que le point G, centre de gravité, décrit une autre droite M. On sait, d'après le théorème de Steiner, que le point de concours H des hauteurs du triangle décrit la directrice D. D'ailleurs, les trois points O, G, H sont en ligne droite, et l'on a $GH = 2GO$. Donc la droite OGH se déplace de manière que les trois points O, G, H se meuvent sur trois droites fixes, le segment GH étant constamment double du segment GO.

Dès lors, cette droite, d'après un théorème facile à établir, enveloppe une parabole tangente aux trois droites fixes; de plus, tout point qui divise le segment OH dans un rapport donné décrit aussi une droite tangente à la parabole. En particulier, le centre I du cercle des neuf points du triangle décrit une droite fixe R.

Proposons-nous de trouver l'enveloppe du cercle des neuf points du triangle.

Rappelons-nous que le cercle circonscrit au triangle passe par deux points fixes et que son rayon est double de celui du cercle des neuf points. Le problème se pose alors ainsi :

Étant données trois droites fixes L, R, D *et une droite mobile* OIH *divisée au point* I *en deux parties égales, on joint le point* O *à un point fixe* F *et on décrit du point* I *comme centre un cercle avec* $\frac{\mathrm{OF}}{2}$ *comme rayon : trouver l'enveloppe de ce cercle.*

Un calcul très simple montre immédiatement que l'enveloppe est une conique. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème X. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une parabole, le cercle des neuf points du triangle reste doublement tangent à une conique fixe.*

En faisant une projection perspective, on a le théorème suivant :

Théorème XI. — *Si l'on considère un triangle variable inscrit dans une conique* C *et circonscrit à une conique* P, *la conique qui passe par deux points fixes* I, J *situés sur une tangente à la conique* P *et par les trois points* *conjugués harmoniques des couples de sommets du triangle par rapport aux trois points de rencontre des côtés de ce triangle et de la droite fixe* IJ *est doublement tangente à une conique fixe ; la corde des contacts pivote autour d'un point fixe situé sur la droite* IJ. *Quand les deux points* I *et* J *sont sur la conique* C, *l'enveloppe se compose de deux droites se coupant en un point de la droite* IJ.

Le théorème corrélatif se trouve facilement et donne lieu à des cas particuliers, comme le précédent.

Nous allons maintenant étudier les *triangles aplatis* inscrits et circonscrits à deux coniques. Considérons deux coniques quelconques C et P; soient A un point commun aux deux courbes et AB la tangente à la courbe P ; cette droite rencontre la courbe C en un second point B; si la tangente en B à la courbe C est tangente commune aux deux coniques, la droite AB constituera un *triangle aplati* circonscrit à la courbe P et inscrit dans la courbe C ; dès lors, il existera une infinité de triangles inscrits et circonscrits à la fois aux deux coniques. Si l'on désigne par $\alpha = 0$, $\beta = 0$ les équations du côté AB et de la tangente commune correspondante, les coniques P et C auront respectivement pour équations

$$K\alpha\beta - L\gamma^2 = 0, \tag{1}$$

$$\beta(A\alpha + B\gamma) - C\alpha^2 = 0. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) représentent deux coniques telles qu'un triangle soit circonscrit à la première et inscrit à la seconde.

L'équation en λ correspondante est

$$L\lambda(A + \lambda K)^2 + B^2 C = 0.$$

Comme les coefficients de l'équation en λ sont des invariants, nous pouvons identifier cette équation avec l'équation générale

$$\Delta\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta' = 0.$$

On a ainsi

$$\Delta = K^2 L,$$
$$\Theta = 2LAK,$$
$$\Theta' = LA^2.$$

On en tire

$$\Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0.$$

On retrouve ainsi, par un procédé d'une grande simplicité, la formule donnée par M. Cayley.

Revenons au système des deux coniques P et C. La condition pour qu'il existe un triangle circonscrit à la courbe P et inscrit dans la courbe C est que, si l'on considère un point A commun aux deux courbes, la tangente au point A à la courbe P rencontre la courbe C en un point de contact d'une tangente commune aux deux courbes; dans ce cas, d'après le théorème de Poncelet, la même propriété aura lieu pour les quatre points de rencontre des deux courbes, et l'on a le théorème suivant :

Théorème XII. — *Étant données deux coniques, si la tangente à l'une d'elles en un point commun rencontre l'autre en un point appartenant à une tangente commune aux deux coniques, la même propriété aura lieu relativement aux trois autres points d'intersection, et, par suite, les points communs aux deux courbes et les points de contact de l'une d'elles avec les quatre tangentes communes sont huit points qui se correspondent deux à deux.*

La traduction analytique de ce théorème fournit un théorème relatif à la transformation de l'équation du quatrième degré. Considérons, par exemple, le système formé par une parabole et une autre courbe du second degré :

$$y^2 - 2px = 0,$$

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

L'équation qui donne les ordonnées des points communs aux deux courbes est

$$(1) \qquad \frac{A}{4p^2}y^4 + B\frac{y^3}{p} + \left(C + \frac{D}{p}\right)y^2 + 2Ey + F = 0.$$

Appelons y_1 l'une des solutions de cette équation. La tangente à la parabole au point qui a pour ordonnée y_1 rencontre la deuxième courbe en un point dont l'ordonnée y_2 est donnée par la formule

$$y_2 = \frac{\frac{A}{4}y_1^4 - Dpy_1^2 + p^2F}{y_1(Cp^2 + Ay_1^2 + 2Bpy_1)}.$$

La polaire de ce second point par rapport à la parabole rencontre cette courbe en deux points, dont les ordonnées sont y_1 et y_3, et l'on a

$$(2) \qquad y_3 = \frac{2\left(p^2F + \frac{A}{4}y^4 - Dpy_1^2\right)}{y_1(Cp^2 + Ay_1^2 + 2Bpy_1)} - y_1.$$

Cela posé, l'équation qui donne les ordonnées des points où la parabole est touchée par les tangentes communes aux deux courbes est

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(E - \frac{Ay_1^3}{2p^2} - \frac{By_1^2}{2p} + \frac{Dy_1}{p}\right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{Ay_1^2}{p^2} + \frac{2By_1}{p} + C\right)\left(F + \frac{Ay_1^4}{4p^2} - \frac{Dy_1^2}{p}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

(*A suivre.*)