NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

Des courbes algébriques qui ont plusieurs axes de symétrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 350-355

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__350_1>

DES COURBES ALGÉBRIQUES QUI ONT PLUSIEURS AXES DE SYMÉTRIE;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

On peut mettre sous une forme caractéristique l'équation des courbes algébriques qui admettent un nombre donné μ d'axes de symétrie sans en admettre davantage. Remarquons d'abord que, en vertu de théorèmes connus, deux axes de l'une des courbes considérées ne peuvent être parallèles ni faire entre eux un angle incommensurable avec π sans que la courbe ait une infinité d'autres axes; ils doivent donc se couper sous un angle égal à $\frac{m\pi}{n}$, m et n étant des entiers premiers entre eux. Par le point de rencontre de ces axes je mène des droites faisant avec le premier les angles $\frac{m\pi}{n}$, $\frac{2m\pi}{n}, \ldots, \frac{m(n-1)\pi}{n}$; ces droites, dont l'une n'est autre que le second axe considéré, sont des axes de la courbe; les propriétés élémentaires des nombres prouvent qu'on a n droites distinctes, formant un faisceau dont les rayons successifs font entre eux l'angle $\frac{\pi}{n}$. Enfin, notre courbe ne peut avoir des axes qui concourent en deux points différents sans en avoir une infinité; en effet, par les points de rencontre des rayons des deux faisceaux, on pourrait mener d'autres axes dont les intersections entre eux et avec les premiers détermineraient de nouveaux centres de rayonnement, de nouveaux axes, et ainsi de suite indéfiniment. Les axes de la courbe cherchée doivent donc se couper sous des angles égaux à $\frac{\pi}{\mu}$, en un point que je prends pour origine de coordonnées rectangulaires.

Soit généralement $\varphi(x,y)=0$ l'équation d'une courbe de degré m; si l'on y change x et y en $\rho\cos\omega$ et $\rho\sin\omega$, et qu'on transforme les puissances de $\sin\omega$ et de $\cos\omega$ ou leurs produits en sinus et cosinus de ω et de ses multiples, on obtient une équation de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &P_m\cos m\omega + Q_m\sin m\omega + \ldots + P_r\cos r\omega \\ &\qquad + Q_r\sin r\omega + \ldots + P_0 = 0, \end{aligned}\right.$$

P_r et Q_r étant des polynômes bien déterminés qui contiennent ρ avec les exposants r, $r+2$, $r+4$, ..., jusqu'à $m+1$ exclusivement.

Supposons que $\varphi(x,y)=0$ représente la courbe que j'étudie, et que l'axe des x soit un de ses axes de symétrie; $\varphi(x,y)$ ne renfermera que des puissances paires de y, et sa transformée en ρ et ω ne contiendra que des puissances paires de $\sin\omega$; elle se réduira donc à une fonction entière de $\cos\omega$, dont les puissances, on le sait, peuvent s'exprimer à l'aide des cosinus de ω et de ses multiples, à l'exclusion des sinus, et, comme la forme de l'équation (1) est bien déterminée, elle doit se réduire dans tous les cas à

$$P_m \cos m\omega + \ldots + P_r \cos r\omega + \ldots + P_0 = 0,$$

les Q_r étant nuls. Il y a plus: si l'on change ω en $\omega' + \frac{\pi}{\mu}$, cette équation devient

$$\Sigma P_r \left(\cos r\omega' \cos\frac{r\pi}{\mu} - \sin r\omega' \sin\frac{r\pi}{\mu}\right) = 0;$$

or cela revient à prendre pour nouvel axe polaire une droite qui fait avec le premier l'angle $\frac{\pi}{\mu}$ et par rapport à laquelle la courbe est encore symétrique; la nouvelle équation ne devra pas renfermer de sinus, et cela exige que P_r soit identiquement nul, à moins que r ne soit un multiple de μ. En définitive, les courbes cherchées peuvent se représenter en coordonnées polaires par une équation dont la forme générale est

$$(2) \qquad P_0 + P_\mu \cos\mu\omega + P_{2\mu} \cos 2\mu\omega + \ldots = 0.$$

Dans le cas où l'axe des x ferait partie de la courbe, φ pourrait renfermer des puissances impaires de y; mais, en le supposant débarrassé des facteurs qui, égalés à zéro, représenteraient quelques-uns des axes de symétrie et qui sont faciles à reconnaître, on est ramené à la règle générale.

Étudions, parmi les courbes considérées, celles dont le degré a la plus petite valeur possible; cette valeur est μ, sinon l'équation (2) se réduirait à $P_0 = 0$ et représenterait un système de cercles avec une infinité d'axes.

Quand on suppose $\mu = m$, l'équation (2) devient

$$(3) \qquad P_0 + P_m \cos m\omega = 0.$$

En nous rappelant la forme de P_0 et de P_m, nous voyons que cette équation donne pour $\cos m\omega$, quand m est impair, une valeur telle que

$$(4) \qquad \cos m\omega = \frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^3} + \ldots + \frac{l}{\rho^m} = f(\rho).$$

Faisons croître ρ de zéro à l'infini; la forme de la courbe dépend de la manière dont variera $f(\rho)$, et il sera commode, pour étudier ses variations, de construire le lieu des points dont l'abscisse serait ρ, l'ordonnée $f(\rho)$. Quand ρ est très petit, $f(\rho)$ est très grand et ne peut représenter un cosinus; la courbe ne passe pas au pôle, à moins qu'elle ne se réduise à un faisceau de droites. Il y a toujours une valeur ρ_1 de ρ telle que $f(\rho_1) = \pm 1$, et à laquelle correspondent m points de la courbe, situés sur les axes à la distance ρ_1 du pôle; à chaque valeur de ρ qui rend $f(\rho) < 1$ en valeur absolue correspondent $2m$ points de la courbe; enfin, à partir d'une certaine grandeur de $\rho, f(\rho)$ tend constamment vers zéro et ω vers les m valeurs $\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{2m}$, où l'on suppose k égal à l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, m-1$. La distance δ du pôle à l'asymptote qui fait l'angle α_k avec l'axe polaire est

$$\delta = \lim \frac{\sin(\alpha_k - \omega)}{\frac{1}{\rho}} = \lim \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}.$$

Mais l'équation (4) donne

$$\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{1}{m \sin m\omega}\left(\frac{a}{\rho^2} + \frac{3b}{\rho^4} + \ldots\right);$$

substituant dans δ, faisant $\rho = \infty$, $\omega = \alpha_k$, on trouve $\delta = \frac{a}{m}$.

La perpendiculaire à l'asymptote faisant l'angle $(k+1)\frac{\pi}{m}$ avec l'axe polaire est un axe de symétrie; il est aisé d'en conclure que l'asymptote a par rapport à la courbe la position qui caractérise une tangente d'inflexion à l'infini. On voit aussi facilement qu'aux valeurs négatives de ρ correspondent des points déjà fournis par les valeurs positives.

Quand m est pair, la valeur de $\cos m\omega$ est de la forme

$$\cos m\omega = a + \frac{b}{\rho^2} + \frac{c}{\rho^4} + \ldots + \frac{l}{\rho^m};$$

la courbe présente des propriétés analogues à celles du cas précédent, mais les points à l'infini et même tous les points de la courbe peuvent être imaginaires; quand les points à l'infini sont réels, il y a m asymptotes qui passent au pôle. Ce pôle est centre de la courbe.

Il est assez facile de trouver les foyers des courbes précédentes; je me borne à considérer le cas de $m = 3$, et je donne à l'équation (3) la forme

$$2\rho^3 \cos 3\omega + 3a\rho^2 + b = 0.$$

L'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires peut s'écrire

$$(5) \quad (x+iy)^3 + (x-iy)^3 + 3a(x+iy)(x-iy) + b = 0.$$

Pour que le point de coordonnées α, β soit un foyer, il faut que la droite

$$(6) \qquad x + iy = \alpha + i\beta$$

touche la courbe; pour exprimer cette condition, je forme une combinaison homogène des équations (5) et (6), soit

$$(x+iy)^3 + (x-iy)^3 + 3a\frac{(x+iy)^2(x-iy)}{\alpha+i\beta} + \frac{b(x+iy)^3}{(\alpha+i\beta)^3} = 0.$$

Cette équation doit fournir deux valeurs égales pour le rapport $\frac{y}{x}$, et par suite pour $\frac{x-iy}{x+iy}$; en appliquant la condition d'égalité de deux des racines de l'équation du troisième degré, on trouve

$$4a^3(\alpha+\beta i)^3 + [(\alpha+\beta i)^3 + b]^2 = 0.$$

En désignant par ε une des racines cubiques imaginaires de l'unité, on voit que le premier membre de cette équation est un produit de six facteurs de la forme

$$(\alpha+\beta i - \sqrt[3]{u'})(\alpha+\beta i - \varepsilon\sqrt[3]{u'})\ldots(\alpha+\beta i - \varepsilon^2\sqrt[3]{u''}) = 0.$$

L'équation $x - iy = \alpha - i\beta$ doit aussi représenter une tangente à la courbe; on est conduit à égaler à zéro un produit de six facteurs, différant des précédents par le changement de i en $-i$. En associant de toutes les manières possibles les facteurs de l'un et de l'autre produit qu'on annule, on trouve les trente-six foyers de la cubique. Les associations qui donnent des foyers réels dépendent d'une manière simple de la réalité ou de la non-réalité de u' et u'', dont on a sans peine deviné la définition.