Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Biehler

Sur les équations linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 311-331

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__311_1>

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES;

PAR M. CH. BIEHLER.

I.

LE NOMBRE DES INCONNUES EST ÉGAL A CELUI DES ÉQUATIONS.

Résolution et discussion d'un système de n équations linéaires à n inconnues.

1. Soient

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + K_1 = 0,\\
X_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + K_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n + K_n = 0
\end{aligned}
$$

les n équations linéaires entre les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Appelons Δ le déterminant des n^2 coefficients des inconnues,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,\nu} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,\nu} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,\nu} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

et supposons $\Delta \gtrless 0$.

Multiplions les éléments de la première colonne de Δ par x_1, ceux de la deuxième par x_2, ceux de la troisième par $x_3, \ldots$, ceux de la dernière par x_n; ajoutons par lignes horizontales les éléments ainsi modifiés et substituons aux éléments de la colonne d'ordre ν dans Δ les sommes ainsi obtenues; par cette substitution le déterminant Δ sera multiplié par x_ν, et l'on aura

$$\Delta x_\nu = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,\nu-1} & X_1 - K_1 & a_{1,\nu+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,\nu-1} & X_2 - K_2 & a_{2,\nu+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,\nu-1} & X_n - K_n & a_{n,\nu+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui figure dans le second membre peut être décomposé en deux autres, savoir

$$\Delta x_\nu = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,\nu-1} & X_1 & a_{1,\nu+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,\nu-1} & X_2 & a_{2,\nu+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,\nu-1} & X_n & a_{n,\nu+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,\nu-1} & K_1 & a_{1,\nu+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,\nu-1} & K_2 & a_{2,\nu+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,\nu-1} & K_n & a_{n,\nu+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Désignons par $\Delta_\nu(X)$ ce que devient Δ quand on y remplace les éléments $a_{1,\nu}, a_{2,\nu}, \ldots, a_{n,\nu}$ de la colonne d'ordre ν respectivement par $X_1, X_2, \ldots, X_n$, et soit $\Delta_\nu(K)$ ce que devient le même déterminant Δ quand on y remplace les éléments de la même colonne par les quantités $K_1, K_2, \ldots, K_n$; l'égalité précédente pourra s'écrire

$$\Delta x_\nu + \Delta_\nu(K) = \Delta_\nu(X).$$

En faisant successivement $\nu = 1$, $\nu = 2, \ldots, \nu = n$ dans cette formule, on obtiendra la série des identités

$$\begin{array}{l} \Delta x_1 + \Delta_1(K) = \Delta_1(X), \\ \Delta x_2 + \Delta_2(K) = \Delta_2(X), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta x_n + \Delta_n(K) = \Delta_n(X). \end{array}$$

Les quantités $\Delta_\nu(X)$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $X_1, X_2, \ldots, X_n$; par suite, toute solution du système

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = 0, \\ X_2 = 0, \\ \ldots\ldots, \\ X_n = 0 \end{array} \right.$$

annule les déterminants $\Delta_\nu(X)$ et par suite satisfait au système

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 + \Delta_1(K) = 0, \\ \Delta x_2 + \Delta_2(K) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta x_n + \Delta_n(K) = 0. \end{array} \right.$$

Inversement, dans l'hypothèse admise de $\Delta \gtrless 0$, la solution du système (2) satisfait au système (1).

Si l'on multiplie en effet la première équation du système (2) par $a_{\mu,1}$, la deuxième par $a_{\mu,2}, \ldots$, la dernière par $a_{\mu,n}$, en ajoutant membre à membre les équations obtenues, il viendra

$$\begin{array}{l} \Delta(a_{\mu,1}x_1 + a_{\mu,2}x_2 + \ldots + a_{\mu,n}x_n) \\ \quad + a_{\mu,1}\Delta_1(K) + a_{\mu,2}\Delta_2(K) + \ldots + a_{\mu,n}\Delta_n(K) = 0 \end{array}$$

ou bien

$$\Delta(X_\mu - K_\mu) + a_{\mu,1}\Delta_1(K) + a_{\mu,2}\Delta_2(K) + \ldots + a_{\mu,n}\Delta_n(K) = 0.$$

Mais

$$a_{\mu,1}\Delta_1(K) + a_{\mu,2}\Delta_2(K) + \ldots + a_{\mu,n}\Delta_n(K) - K_\mu\Delta$$

est, au signe près, le déterminant d'ordre $n+1$

$$\begin{vmatrix} a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \ldots & a_{\mu,n} & K_\mu \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & K_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \ldots & a_{\mu,n} & K_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & K_n \end{vmatrix},$$

qui est identiquement nul, comme ayant deux rangées identiques; l'équation précédente devient donc

$$\Delta X_\mu = 0,$$

et, comme $\Delta \gtrless 0$, on a $X_\mu = 0$ pour toutes les valeurs de μ depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = n$.

On voit donc que, si Δ est différent de zéro, les systèmes (1) et (2) sont équivalents, et le système (2) donne pour les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs uniques et déterminées.

Discussion.

2. Considérons actuellement le cas où le déterminant Δ est égal à zéro, et supposons en outre que tous les déterminants mineurs d'ordre supérieur à p $(p < n)$ soient nuls.

L'un des déterminants mineurs d'ordre p est supposé différent de zéro; supposons que ce soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} \end{vmatrix}.$$

Alors le système des équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots,$ $X_p = 0$ sera satisfait pour des valeurs uniques et déterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ quand on aura attribué aux inconnues $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ des valeurs arbitraires, mais déterminées.

Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & a_{1,p+\beta} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & a_{2,p+\beta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & a_{p,p+\beta} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,p+\beta} \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant d'ordre $p + 1$, qui, par hypothèse, est nul.

Ce déterminant est identique au suivant, savoir

$$(\alpha)\qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & U_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & U_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & U_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & U_{p+\alpha} \end{vmatrix},$$

où $U_1, U_2, \ldots, U_p$, pour abréger, désignent les quantités

$$\begin{aligned} U_1 &= X_1 - a_{1,p+1}x_{p+1} - a_{1,p+2}x_{p+2} - \ldots \\ &\quad - a_{1,n}x_n - a_{1,p+\beta} - K_1, \\ U_2 &= X_2 - a_{2,p+1}x_{p+1} - a_{2,p+2}x_{p+2} - \ldots \\ &\quad - a_{2,n}x_n - a_{2,p+\beta} - K_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_{p+\alpha} &= X_{p+\alpha} - a_{p+\alpha,p+1}x_{p+1} - a_{p+\alpha,p+2}x_{p+2} - \ldots \\ &\quad - a_{p+\alpha,n}x_n - a_{p+\alpha,p+\beta} - K_{p+\alpha}. \end{aligned}$$

Si l'on décompose le déterminant (α) en une somme de déterminants, les coefficients de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ sont des déterminants mineurs de Δ, qui, par hypothèse, sont nuls; par suite, (α) prend la forme plus simple

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & X_1 - K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & X_2 - K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & X_p - K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} - K_{p+\alpha} \end{vmatrix};$$

le déterminant (α) étant nul, on aura

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on considère un système de valeurs de $x_1, x_2, \dots,$ $x_p, \dots, x_n$ qui annulent $X_1, X_2, \dots, X_p$ (ce système, comme nous l'avons vu, est formé par des valeurs arbitraires de $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ et par des valeurs correspondantes déterminées de $x_1, x_2, \dots, x_p$), pour ces valeurs, l'équation précédente se réduira à

$$X_{p+\alpha} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & a_{1,p+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0,$$

et, comme le multiplicateur de $X_{p+\alpha}$ est, par hypothèse, différent de zéro, l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ ne pourra être satisfaite pour les valeurs des inconnues qui annulent X_1, $X_2, \ldots, X_p$, que si le déterminant

$$(\alpha') \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & K_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix}$$

est nul. Si ce déterminant n'est pas nul, l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ est incompatible avec les p premières équations; il y aura donc, dans le système proposé, autant d'équations incompatibles avec $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $\ldots$, $X_p = 0$ qu'il y a de déterminants (α') différents de zéro. Si (α') est nul, $X_{p+\alpha}$ est une fonction linéaire et homogène de $X_1, X_2, \ldots, X_p$, définie par l'identité

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Cas où le système proposé est homogène.

3. Ce qui précède montre que, dans le cas où Δ est différent de zéro, un système linéaire et homogène, dans lequel le nombre des équations est égal à celui des inconnues, ne peut être satisfait que pour des valeurs nulles des inconnues.

Si $\Delta = 0$ et si, en outre, tous les déterminants mineurs d'ordre supérieur à p sont nuls sans que tous les déterminants d'ordre p soient nuls, la discussion précédente montre que, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_p = 0$ sont satisfaites pour des valeurs arbitraires de x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n et des valeurs déterminées correspondantes de x_1, x_2, ..., x_p; les équations $X_{p+1} = 0$, $X_{p+2} = 0$, ..., $X_n = 0$ seront satisfaites pour les mêmes valeurs des inconnues. Ces $n - p$ équations sont des conséquences des p premières; il n'y a jamais incompatibilité, puisque les déterminants tels que (α') sont nuls d'eux-mêmes.

Les quantités $X_{p+\alpha}$ sont des fonctions linéaires de X_1, X_2, ..., X_p définies par la relation

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

II.

LE NOMBRE DES ÉQUATIONS SURPASSE CELUI DES INCONNUES.

4. Supposons d'abord que l'on ait un système de $n + 1$ équations à n inconnues, savoir :

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1} = 0, \\ X_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n + a_{2,n+1} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_{n+1} &= a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \dots + a_{n+1,n}x_n + a_{n+1,n+1} = 0. \end{aligned}$$

Cherchons la condition pour que ces équations soient compatibles. Désignons par Δ le déterminant d'ordre $n+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix};$$

on aura aussi identiquement

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & X_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Si les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_{n+1} = 0$ admettent une solution commune, l'équation précédente montre qu'on devra avoir $\Delta = 0$; par suite, $\Delta = 0$ est la condition nécessaire pour que les équations proposées soient compatibles.

Inversement, supposons que Δ soit nul et supposons, de plus, que l'un des déterminants mineurs de Δ d'ordre n, formé avec les coefficients des inconnues, soit différent de zéro, par exemple le déterminant

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu-1,1} & a_{\mu-1,2} & \dots & a_{\mu-1,n} \\ a_{\mu+1,1} & a_{\mu+1,2} & \dots & a_{\mu+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} \end{vmatrix},$$

les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_{\mu-1} = 0$, $X_{\mu+1} = 0$, ..., $X_{n+1} = 0$ admettront une solution unique et déterminée. D'ailleurs, l'équation $\Delta = 0$ peut s'écrire, d'après (3),

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta = \Delta(n+1)X_{n+1} - \Delta(n)X_n + \ldots \\ \qquad \pm \Delta(\mu+1)X_{\mu+1} \mp \Delta(\mu)X_\mu \\ \qquad \pm \Delta(\mu-1)X_{\mu-1} \mp \ldots \pm \Delta_1 X_1 = 0. \end{cases}$$

Pour les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui annulent $X_1, X_2, \ldots, X_{\mu-1}, X_{\mu+1}, \ldots, X_{n+1}$, l'identité (4) se réduit à

$$\Delta(\mu)X_\mu = 0,$$

et, comme $\Delta(\mu)$ est supposé différent de zéro, pour ces valeurs on aura aussi

$$X_\mu = 0,$$

c'est-à-dire que les $n+1$ équations proposées sont compatibles.

On voit donc que si les déterminants mineurs de Δ, coefficients de $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \ldots, a_{n+1,n+1}$, ne sont pas tous nuls, la condition $\Delta = 0$ indique que les équations proposées ont une solution commune. Si tous les déterminants mineurs de Δ d'ordre supérieur à p et ne renfermant pas les éléments $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \ldots, a_{n+1,n+1}$ sont nuls, et si un déterminant d'ordre p, par exemple

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} \end{vmatrix},$$

est différent de zéro, les équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_p = 0$ admettent pour $x_1, x_2, \ldots, x_p$ une solution déterminée quand on donne à $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ des valeurs arbitraires, mais déterminées.

En opérant comme pour la discussion d'un système de

n équations à n inconnues (n^o 2), on arrive à l'identité

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & a_{p,n+1} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour un système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui annulent $X_1, X_2, \ldots, X_p$, cette identité se réduit à la suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} \end{vmatrix} X_{p+\alpha}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & a_{p,n+1} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Si donc le déterminant

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & a_{p,n+1} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,n+1} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ ne peut être satisfaite par les valeurs des inconnues qui annulent $X_1, X_2, \ldots, X_p$; l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ est donc incompatible avec les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots, X_p = 0$, quoique Δ soit nul.

Le nombre d'équations incompatibles avec $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots, X_p = 0$ est égal au nombre de déterminants de la forme (6) qui ne sont pas nuls.

5. D'une manière générale, considérons un système de $n+p$ équations à n inconnues, et proposons-nous de chercher les conditions de compatibilité des équations de ce système.

Soit le système

$$\begin{array}{l}
X_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1} = 0,\\
X_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + a_{2,n+1} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_n = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n + a_{n,n+1} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_{n+p} = a_{n+p,1}x_1 + a_{n+p,2}x_2 + \ldots + a_{n+p,n}x_n + a_{n+p,n+1} = 0.
\end{array}$$

Supposons d'abord que l'un des déterminants d'ordre n, formé avec les coefficients des inconnues de n des équations précédentes, soit différent de zéro; supposons que ce soit le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Considérons le déterminant d'ordre $n+1$

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & a_{n,n+1} \\ a_{n+\nu,1} & a_{n+\nu,2} & \ldots & a_{n+\nu,n} & a_{n+\nu,n+1} \end{vmatrix}.$$

On aura identiquement

$$(5)\quad \Delta(\nu) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & X_n \\ a_{n+\nu,1} & a_{n+\nu,2} & \ldots & a_{n+\nu,n} & X_{n+\nu} \end{vmatrix}.$$

Comme $\Delta \gtrless 0$, les équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \ldots, \quad X_n = 0$$

admettent une solution unique et déterminée; si l'équation $X_{n+\nu} = 0$ doit être compatible avec les précédentes, il faudra que l'on ait $\Delta(\nu) = 0$. Les équations $\Delta(1) = 0$, $\Delta(2) = 0$, ..., $\Delta(p) = 0$ seront donc (dans le cas de $\Delta \gtrless 0$) les conditions nécessaires pour que les $n + p$ équations proposées soient compatibles.

Ces conditions sont aussi suffisantes, car l'identité (5) devient

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & X_n \\ a_{n+\nu,1} & a_{n+\nu,2} & \ldots & a_{n+\nu,n} & X_{n+\nu} \end{vmatrix} = 0,$$

et, par suite, le système de valeurs des inconnues qui annule X_1, X_2, ..., X_n annule aussi $X_{n+\nu}$, puisque Δ est toujours supposé différent de zéro. Par suite enfin, $\Delta(1) = 0$, $\Delta(2) = 0$, ..., $\Delta(p) = 0$ sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les $n + p$ équations proposées soient compatibles, sous la condition $\Delta \gtrless 0$.

Dans le cas où les $n + p$ équations proposées sont compatibles, tous les déterminants d'ordre $n + 1$ formés avec les coefficients de $n + 1$ des équations proposées sont nuls.

Cela résulte de la proposition établie au n° 4.

Supposons maintenant que tous les déterminants d'ordre supérieur à q que l'on peut former avec les coefficients des inconnues, en prenant pour éléments d'une rangée les coefficients d'une même équation et pour éléments d'une colonne les coefficients d'une même inconnue dans les mêmes équations, soient nuls, et que le déterminant d'ordre q

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. On établira, comme on l'a fait au n° 2, l'identité

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & X_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & X_{q+\alpha} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & a_{q,n+1} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & a_{q+\alpha,n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cela posé, si le déterminant

$$(6') \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & a_{q,n+1} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & a_{q+\alpha,n+1} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, l'équation $X_{q+\alpha} = 0$ sera incompatible avec le système $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_q = 0$; si le déterminant (6') est nul, $X_{q+\alpha} = 0$ est au contraire compatible avec $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_q = 0$.

Par suite, les équations $\Delta(1) = 0$, $\Delta(2) = 0$, ..., $\Delta(p) = 0$ n'entraînent plus la compatibilité des $n + p$ équations proposées.

III.

LE NOMBRE DES INCONNUES SURPASSE CELUI DES ÉQUATIONS.

6. Considérons le système de n équations à $n + p$ inconnues

$$\begin{aligned}
X_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots \\
&\quad + a_{1,n}x_n + \ldots + a_{1,n+p}x_{n+p} + K_1 = 0, \\
X_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots \\
&\quad + a_{2,n}x_n + \ldots + a_{2,n+p}x_{n+p} + K_2 = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
X_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots \\
&\quad + a_{n,n}x_n + \ldots + a_{n,n+p}x_{n+p} + K_n = 0.
\end{aligned}$$

Si un seul des déterminants d'ordre n formés avec les coefficients de n des inconnues dans les n équations est différent de zéro, le système proposé admet une infinité de solutions.

Si tous les déterminants d'ordre supérieur à q ($q < n$) formés avec les coefficients des inconnues sont nuls, et que le déterminant

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,q} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,q} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{q,1} & a_{q,2} & \ldots & a_{q,q}
\end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, nous pourrons, comme au n° 2, établir l'identité

$$(6)\quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & X_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & X_{q+\alpha} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & K_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & K_{q+\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Si donc le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & K_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & K_{q+\alpha} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, l'équation $X_{q+\alpha} = 0$ est incompatible avec $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \dots, X_q = 0$.

7. Si les équations proposées sont homogènes, c'est-à-dire si $K_1 = 0$, $K_2 = 0, \dots, K_n = 0$, l'identité (6) et toutes celles qu'on obtient en faisant varier α de 1 à $n - q$, prennent la forme

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & X_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & X_{q+\alpha} \end{vmatrix} = 0,$$

et l'équation $X_{q+\alpha} = 0$ est compatible avec les q premières.

La quantité $X_{q+\alpha}$ est une fonction linéaire et homogène de $X_1, X_2, \ldots, X_q$, et par suite les n équations du système proposé se réduisent à q d'entre elles. Ces q équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_q = 0$ sont indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène entre leurs premiers membres. Si l'on avait, en effet, entre $X_1, X_2, \ldots, X_q$ une relation de la forme

$$(8) \qquad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_q X_q = 0,$$

on en déduirait

$$\begin{array}{l} a_{1,1}\lambda_1 + a_{2,1}\lambda_2 + \ldots + a_{q,1}\lambda_q = 0, \\ a_{1,2}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 + \ldots + a_{q,2}\lambda_q = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1,q}\lambda_1 + a_{2,q}\lambda_2 + \ldots + a_{q,q}\lambda_q = 0, \end{array}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{q,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{q,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,q} & a_{2,q} & \ldots & a_{q,q} \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre étant un déterminant que nous avons supposé différent de zéro, l'équation (8) ne peut pas avoir lieu.

8. Nous allons, en terminant cette question, donner la démonstration d'une proposition générale qui renferme comme cas particuliers les théorèmes suivants de M. Ventéjol (*Théorie de l'élimination*, février 1877):

1° *Si, dans un système de n équations linéaires et homogènes à $n+p$ inconnues, un déterminant d'ordre $(n-1)$ est différent de zéro, pour que ces équations se réduisent à $(n-1)$ distinctes, il est nécessaire et suffisant que les $p+1$ déterminants d'ordre n formés par les $n-1$ colonnes qui donnent le déterminant différent* *de zéro et chacune des $p+1$ autres soient nuls à la fois.*

2° *Si, dans un système de n équations linéaires et homogènes à $n+p$ inconnues, un déterminant d'ordre $n-1$ est différent de zéro, et que les $p+1$ déterminants d'ordre n formés par les $n-1$ colonnes qui donnent le déterminant différent de zéro et chacune des $p+1$ restantes soient nuls à la fois, tous les autres déterminants d'ordre n tirés du système proposé seront aussi nuls.*

3° *Si, dans un système de n équations linéaires et homogènes à $n+p$ inconnues, tous les déterminants d'ordre $n-1$ sont nuls, et qu'un déterminant d'ordre $n-2$ soit différent de zéro, le système se réduit à $n-2$ équations distinctes.*

4° *Si tous les déterminants d'ordre $n-2$ sont nuls et qu'un déterminant d'ordre $n-3$ soit différent de zéro, le système proposé se réduit à $n-3$ équations distinctes.*

Supposons à cet effet qu'un déterminant d'ordre q ($q < n$) soit différent de zéro ; soit, pour fixer les idées,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \ldots & a_{q,q} \end{vmatrix}$$

ce déterminant, et considérons le déterminant d'ordre $q+1$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,q} & a_{1,q+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,q} & a_{2,q+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \ldots & a_{q,q} & a_{q,q+1} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \ldots & a_{q+\alpha,q} & a_{q+\alpha,q+1} \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons ce déterminant par $\Delta(\alpha, 1)$, en posant, d'une manière générale,

$$\Delta(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & a_{1,q+\beta} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & a_{2,q+\beta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & a_{q,q+\beta} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & a_{q+\alpha,q+\beta} \end{vmatrix}.$$

En opérant sur le déterminant $\Delta(\alpha, 1)$ comme nous l'avons fait dans les n^{os} 1 et 2, on obtiendra l'identité

$$(9)\quad \Delta(\alpha, 1)\, x_{q+1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & U_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & U_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & U_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & U_{q+\alpha} \end{vmatrix},$$

en faisant

$$\begin{aligned} U_1 &= X_1 - a_{1,q+2}\, x_{q+2} \\ &\quad - a_{1,q+3}\, x_{q+3} - \dots - a_{1,n+p}\, x_{n+p}, \\ U_2 &= X_2 - a_{2,q+2}\, x_{q+2} \\ &\quad - a_{2,q+3}\, x_{q+3} - \dots - a_{2,n+p}, x_{n+p}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ U_{q+\alpha} &= X_{q+\alpha} - a_{q+\alpha,q+2}\, x_{q+2} \\ &\quad - a_{q+\alpha,q+3}\, x_{q+3} - \dots - a_{q+\alpha,n+p}\, x_{n+p}, \end{aligned}$$

et, par suite, en développant et faisant usage de la notation adoptée, il viendra

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta(\alpha, 1)\, x_{q+1} + \Delta(\alpha, 2)\, x_{q+2} + \dots + \Delta(\alpha, n+p-q)\, x_{n+p} \\ &\quad = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & X_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & X_{q+\alpha} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Pour que les équations données se réduisent aux q premières, savoir

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \ldots, \quad X_q = 0,$$

il faut que toute solution de ces équations satisfasse à l'équation

$$X_{q+\alpha} = 0,$$

pour toutes les valeurs de α depuis $\alpha = 1$ jusqu'à $\alpha = n - q$.

Or, si l'on donne à $x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_{n+p}$ des valeurs tout à fait arbitraires, les équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_q = 0$ fournissent pour $x_1, x_2, \ldots, x_q$ des valeurs fonctions déterminées de $x_{q+1}, \ldots, x_{n+p}$. Pour ces valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_q, X_{q+\alpha}$ devront s'annuler; par suite, on doit avoir, quelles que soient les valeurs de $x_{q+1}, \ldots, x_{n+p}$,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta(\alpha, 1) x_{q+1} + \Delta(\alpha, 2) x_{q+2} + \ldots \\ \qquad + \Delta(\alpha, n+p-q) x_{n+p} = 0. \end{array} \right.$$

L'équation (11) devant subsister quelles que soient les valeurs de $x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_{n+p}$, on devra avoir

$$\Delta(\alpha, 1) = 0, \quad \Delta(\alpha, 2) = 0, \quad \ldots, \quad \Delta(\alpha, n+p-q) = 0,$$

et cela pour toutes les valeurs de α depuis $\alpha = 1$ jusqu'à $\alpha = n - q$.

On a donc ce théorème :

Théorème. — *Si le déterminant d'ordre q désigné plus haut est différent de zéro, pour que les équations proposées se réduisent aux q premières, il faut que tous les déterminants $\Delta(\alpha, \beta)$ obtenus en faisant varier α de 1 à $n - q$ et β de 1 à $n + p - q$ soient nuls.*

L'identité (10) *montre d'ailleurs que, si les déterminants $\Delta(\alpha, \beta)$ obtenus en faisant varier α depuis 1 jusqu'à $n - q$ et β depuis 1 jusqu'à $n + p - q$ sont nuls, les quantités $X_{q+\alpha}$ sont des fonctions linéaires et homo-*

gènes de $X_1, X_2, \ldots, X_q$ *et, par suite, toutes les équations se réduisent aux* q *premières.*

En suivant la même méthode, on démontrerait aisément que *tous les déterminants d'ordre* $q+1$ *sont nuls, si les équations proposées se réduisent à* q *d'entre elles.*

(*A suivre.*)