Nouvelles annales de mathématiques

Candèze

Sur une règle de M. Laguerre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 307-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__307_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR UNE RÈGLE DE M. LAGUERRE;

Par M. CANDÈZE,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

Je me propose de démontrer que la règle donnée par M. Laguerre (même Tome, p. 52) pour trouver une limite supérieure du nombre des racines supérieures à un nombre donné a fournit toujours un nombre au moins égal à celui donné par les variations de la suite de Budan et de Fourier.

Considérons l'identité d'où part M. Laguerre,

$$\frac{f(x)}{x-a} = F_0 x^{m-1} + F_1 x^{m-2} + \ldots$$
$$+ F_{m-2} x + F_{m-1} + \frac{F_m}{x-a} = f_1(x) + \frac{f(a)}{x-a},$$

et divisons de même $f_1(x)$ par $x-a$; nous aurons

$$\frac{f_1(x)}{x-a} = F'_0 x^{m-2} + F'_1 x^{m-3} + \ldots$$
$$+ F'_{m-2} + \frac{F'_{m-1}}{x-a} = f_2(x) + \frac{f_1(a)}{x-a}.$$

Cela posé, je dis que :

Lemme. — *Le nombre des variations de la suite*

(1) $$F_0,\ F_1,\ \ldots,\ F_{m-2},\ F_{m-1},\ F_m$$

est au moins égal à celui de la suite

(2) $$F'_0,\ F'_1,\ \ldots,\ F'_{m-2},\ F'_{m-1},\ F_m.$$

Pour le démontrer, remarquons d'abord que, si l'on multiplie un polynôme par $x-a$ et qu'on ajoute au produit une constante, on ne peut faire disparaître au plus qu'une des variations introduites en multipliant par $x-a$; le nombre des variations du nouveau polynôme est donc au moins égal au nombre des variations du polynôme proposé, ce qui prouve, en particulier, que le nombre des variations de la suite de M. Laguerre est toujours au plus égal au nombre des variations du polynôme.

Soient maintenant v_1, v_2 les nombres des variations des suites (1) et (2) jusqu'à F_{m-2}, F'_{m-2} inclusivement, et V_1, V_2 les nombres des variations des suites (1) et (2) complètes. On a d'ailleurs

$$F_{m-1} = -aF'_{m-2} + F'_{m-1}.$$

Supposons :

1° Qu'il n'y ait pas de variations entre F'_{m-2}, F'_{m-1} et F_m.

On sait que

$$v_1 \geqq v_2.$$

Or

$$v_2 = V_2;$$

donc

$$V_1 \geq v_1 \geq v_2, \quad V_1 \geq V_2.$$

2° Qu'il y ait une variation unique dans F'_{m-2}, F'_{m-1} et F_m, et qu'elle soit entre F'_{m-2} et F'_{m-1}.

On a

$$v_1 \geq v_2.$$

D'ailleurs, en multipliant $f_2(x)$ par $x - a$, on introduit certainement une variation, car $-aF'_{m-2}$ est du signe de F'_{m-2} :

$$V_2 = v_2 + 1, \quad V_1 \geq v_1 + 1 \geq v_2 + 1, \quad V_1 \geq v_2 + 1;$$

donc

$$V_1 \geq V_2.$$

3° Que la variation soit entre F'_{m-1} et F_m.

Alors, en ajoutant au dernier terme du produit $f_2(x)(x-a)$, qui est $-aF'_{m-2}$, le terme F'_{m-1}, on pourra détruire la variation. Si on ne la détruit pas,

$$V_1 \geq v_1 + 1.$$

Or

$$V_2 = v_2 + 1;$$

donc

$$V_1 \geq V_2.$$

Si on la détruit, $-aF'_{m-2} + F'_{m-1}$ est du signe de F'_{m-1}; donc encore

$$V_1 \geq v_1 + 1,$$

d'où

$$V_1 \geq V_2.$$

4° Que F'_{m-2}, F'_{m-1}, F_m présentent deux variations :

$$V_2 = v_2 + 2.$$

En multipliant $f_2(x)$ par $x - a$ et ajoutant F'_{m-1}, on introduit au moins une variation, et le dernier terme $-aF'_{m-2}+F'_{m-1}$ est de signe contraire à F_m :

$$V_1 \geq v_2 + 2,\ V_1 \geq V_2.$$

C. Q. F. D.

Cela posé, divisons $f_2(x)$ par $x-a$, et ainsi de suite jusqu'à $f_{m-1}(x)$ et f_m :

$$\frac{f_{m-1}(x)}{x-a} = f_m + \frac{f_{m-1}(a)}{x-a}.$$

La suite

$$(3) \qquad f_m,\ f_{m-1}(a),\ \ldots,\ f_1(a),\ f(a)$$

aura, d'après ce qui vient d'être établi, au plus autant de variations que la suite de M. Laguerre. Or, cette suite n'est autre que la suite des dérivées affectées de coefficients positifs.

En effet,

$$\frac{f(x)}{(x-a)^m} = f_m + \frac{f_{m-1}(a)}{x-a} + \ldots + \frac{f_1(a)}{(x-a)^{m-1}} + \frac{f(a)}{(x-a)^m}.$$

Mais

$$f(x+a) = f(a) + \frac{xf'(a)}{1} + \ldots + \frac{x^{m-1}f^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{x^m f^m(a)}{1.2.3\ldots m},$$

d'où

$$\frac{f(x+a)}{x^m} = \frac{f(a)}{x^m} + \frac{f'(a)}{x^{m-1}} + \ldots + \frac{f^m(a)}{1.2.3\ldots m},$$

et enfin

$$\frac{f(x)}{(x-a)^m} = \frac{f^m(a)}{1.2.3\ldots m} + \frac{f^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)(x-a)} + \ldots + \frac{f'(a)}{(x-a)^{m-1}} + \frac{f(a)}{(x-a)^m}.$$

Et comme la décomposition en fractions rationnelles n'est possible que d'une seule manière, la propriété est établie.

Il suit de là que former la suite des dérivées, c'est en réalité faire une suite de divisions par $x - a$, et, comme M. Laguerre s'arrête après la première, le nombre obtenu par le procédé si simple qu'il a donné se trouve compris entre le nombre des variations du polynôme et le nombre des variations de la suite des dérivées.

On pourrait d'ailleurs s'arrêter après une quelconque des opérations.

Le nombre des variations obtenues à chaque instant est une limite supérieure du nombre des racines supérieures à a.