NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FOURET

# Sur la construction de la tangente à la courbe $\rho = \frac{f(\omega)}{\omega+\varphi(\omega)}$, $f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ désignant des fonctions rationnelles des lignes trigonométriques de l'angle $\omega$, de ses multiples ou de ses parties aliquotes

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 19 (1880), p. 28-42

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__28_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# SUR LA CONSTRUCTION DE LA TANGENTE A LA COURBE $\rho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}$, $f(\omega)$ ET $\varphi(\omega)$ DÉSIGNANT DES FONCTIONS RATIONNELLES DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DE L'ANGLE $\omega$, DE SES MULTIPLES OU DE SES PARTIES ALIQUOTES;

Par M. G. FOURET,

Repétiteur à l'École Polytechnique.

1. La seule hypothèse que nous ferons tout d'abord sur la nature des fonctions $f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$, qui figurent dans l'équation

$$\rho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}, \tag{1}$$

sera de supposer que l'angle $\omega$ n'y entre que par ses lignes trigonométriques et par celles de ses multiples, sous-multiples ou parties aliquotes quelconques. Nous allons, dans cette hypothèse, former une expression de $\tang V$ qui ne contienne que $\rho$ et des fonctions trigonométriques de $\omega$, V désignant l'angle de la tangente en un point quelconque de la courbe avec le rayon vecteur.

Dans ce but, écrivons l'équation (1) de la manière suivante :

$$\rho[\omega + \varphi(\omega)] - f(\omega) = 0,$$

puis prenons les dérivées; nous obtenons

$$\rho'[\omega + \varphi(\omega)] + \rho[1 + \varphi'(\omega)] - f'(\omega) = 0.$$

En éliminant $\omega + \varphi(\omega)$ entre ces deux équations, on en déduit

$$\text{(2)} \qquad \frac{\rho}{\rho'} = \frac{f(\omega)}{f'(\omega) - \rho[1 + \varphi'(\omega)]}.$$

En posant

$$\text{(3)} \qquad \frac{f'(\omega)}{1 + \varphi'(\omega)} = h, \qquad \frac{f(\omega)}{1 + \varphi'(\omega)} = k,$$

et observant que l'on a

$$\frac{\rho}{\rho'} = \operatorname{tang} V,$$

on tire de l'équation (2) la relation

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tang} V = \frac{k}{h - \rho}.$$

2. *Remarque.* — Les relations (2), (3) et (4) ne changent pas, lorsque l'on considère, au lieu de l'équation (1), l'équation plus générale

$$\rho = \frac{f(\omega)}{\omega - \alpha + \varphi(\omega)},$$

dans laquelle $\alpha$ désigne une constante arbitraire. L'équation (2) n'est d'ailleurs autre chose que l'équation différentielle commune à toutes les courbes obtenues en faisant varier $\alpha$. Comme, en vertu de l'hypothèse faite sur $f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$, cette équation différentielle écrite en coordonnées cartésiennes serait algébrique, les courbes qu'elle définit forment un *système*, c'est-à-dire qu'il y en a un nombre déterminé, dans le plan, qui passent par un point quelconque, et un nombre déterminé qui sont tangentes à une droite quelconque [*Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes* (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. II, p. 72-83)].

3. L'expression (4) de $\tang V$ fournit la construction suivante de la tangente en un point quelconque M de la courbe (1).

Sur le rayon vecteur OM, et à partir du pôle O, portons une longueur $OP = h$ dans le sens déterminé par le signe de $h$. Au point P élevons une perpendiculaire au rayon vecteur, et prenons sur cette perpendiculaire une longueur $PI = k$, dans le sens des $\omega$ croissants si $k$ est positif, et dans le sens contraire s'il est négatif. Le point I est un point de la tangente cherchée, qu'on obtient par suite en joignant le point M au point I.

Dans les cas où les expressions de $h$ et de $k$ se prêteront à une construction suffisamment simple du point I, on aura une construction de la tangente. Nous en donnerons plus loin des exemples.

4. Supposons maintenant que $f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ soient des fonctions *rationnelles* des lignes trigonométriques de l'angle $\omega$, de ses multiples ou parties aliquotes quelconques. On sait que toutes ces lignes trigonométriques peuvent s'exprimer en fonction rationnelle du sinus et du cosinus d'un même sous-multiple de $\omega$ : soit $\frac{\omega}{n}$ le plus grand des sous-multiples de $\omega$ jouissant de cette propriété. Comme $\sin\frac{\omega}{n}$ et $\cos\frac{\omega}{n}$ ne prennent que $n$ valeurs distinctes lorsqu'on remplace $\omega$ par $\omega + 2i\pi$, $i$ désignant un nombre entier quelconque, il en sera de même de $f(\omega)$, de $\varphi(\omega)$, et par suite aussi de $f'(\omega)$ et de $\varphi'(\omega)$.

Il résulte de là, en vertu des expressions (3) de $h$ et de $k$, que, pour chaque rayon vecteur, on construira, à l'aide des relations (3), $n$ points I; et la tangente à la courbe, en l'un quelconque de ses points situés sur le rayon vecteur considéré, ira passer par l'un de ces points I.

5. Le rayon vecteur auquel correspondent les $n$ points I dont il vient d'être question est envisagé avec le sens qui lui est assigné par la valeur de $\omega$. Comme il y a de même $n$ points I pour le rayon vecteur de sens directement contraire au précédent, on a généralement en tout $2n$ points I pour chaque droite issue du point O. Ce nombre se réduira toutefois à $n$ lorsque, pour deux valeurs de $\omega$ différant d'un multiple impair de $\pi$ convenablement choisi, $f(\omega)$ prendra des valeurs égales et de signes contraires, $\varphi(\omega)$ des valeurs égales et de même signe. Dans ce cas, en effet, $h$ et $k$ changeront de signe lorsqu'on échangera entre elles ces deux valeurs de $\omega$, et, par suite, la construction indiquée plus haut (3) donnera, pour ces deux valeurs, le même point I.

6. Il est facile de former l'équation du lieu des points I. Désignons par $\rho_1$ et $\omega_1$ les coordonnées polaires d'un quelconque de ces points correspondant à une droite inclinée d'un angle $\omega$ sur l'axe polaire. On a évidemment, eu égard aux relations (3),

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \omega + \operatorname{arctang}\frac{k}{h} = \omega + \operatorname{arctang}\frac{f(\omega)}{f'(\omega)},\\ \rho_1 &= \sqrt{h^2+k^2} = \frac{\sqrt{f^2(\omega)+f'^2(\omega)}}{1+\varphi'(\omega)}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on rapporte ce même lieu à un système d'axes rectangulaires composé de l'axe polaire $Ox$ et de la perpendiculaire $Oy$ à cette droite menée par le pôle, on a, pour les coordonnées $x$ et $y$ d'un point I quelconque,

$$\begin{aligned} x &= h\cos\omega - k\sin\omega,\\ y &= h\sin\omega + k\cos\omega, \end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant $h$ et $k$ par leurs valeurs (3) en fonction de $\omega$,

$$(6)\quad \begin{cases} x = \dfrac{f'(\omega)\cos\omega - f(\omega)\sin\omega}{1+\varphi'(\omega)}, \\ y = \dfrac{f'(\omega)\sin\omega + f(\omega)\cos\omega}{1+\varphi'(\omega)}. \end{cases}$$

Ces formules nous serviront plus loin.

## APPLICATIONS.

7. *Spirale hyperbolique.* — Parmi les équations qui rentrent dans le type de l'équation (1), la plus simple est

$$\rho = \frac{a}{\omega - \alpha},$$

qui définit, comme on sait, la courbe appelée *spirale hyperbolique*.

Les formules (3) donnent, dans ce cas,

$$h = 0, \quad k = a.$$

On voit par là que les tangentes, aux divers points de la spirale correspondant aux angles polaires compris dans la formule $2i\pi + \omega$, concourent en un point I, qui s'obtient en élevant en O à la direction commune du rayon vecteur une perpendiculaire, et portant un segment égal à $a$ sur la portion de cette perpendiculaire inclinée de $\frac{\pi}{2}$ sur la partie positive du rayon vecteur. On retrouve ainsi la propriété caractéristique de cette courbe, consistant en ce que sa *sous-tangente* est constante.

Quant aux points de la spirale correspondant aux angles $(2i+1)\pi + \omega$, dont les rayons vecteurs sont situés sur la même droite que les rayons vecteurs correspondant à $2i\pi + \omega$, les tangentes en ces points concourent également en un même point ; mais ce point est distinct du point I : il lui est diamétralement opposé par rapport au pôle.

8. *Courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, éclairée par des rayons lumineux convergents.*

Cherchons tout d'abord l'équation polaire de la projection de cette courbe d'ombre sur un plan perpendiculaire à l'axe de la surface de vis et passant par le point lumineux A. Nous considérerons ce plan comme plan horizontal de projection. Prenons pour pôle le pied O de l'axe de la surface de vis et pour axe polaire la droite OA. Posons $OA = a$, et désignons par $\alpha$ l'angle que fait avec OA la génératrice de la surface de vis située dans le plan horizontal. En appelant H le pas de la surface de vis, et $p$ le paramètre de distribution commun à toutes les génératrices, on a, comme on sait, $p = \frac{H}{2\pi}$.

Cela posé, considérons une génératrice quelconque G dont la projection horizontale $Og$ fait avec $Ox$ l'angle $\omega$, et évaluons le rayon vecteur $Om = \rho$, $m$ étant la projection horizontale du point M de la courbe d'ombre situé sur G. Le point M n'est autre chose que le point de la génératrice G, en lequel le plan passant par cette droite et le point lumineux A est tangent à la surface. En désignant par $\varphi$ l'angle de ce plan avec le plan projetant horizontalement la génératrice G, lequel n'est autre que le plan central de cette génératrice, et en remarquant que le point central est situé sur l'axe, on a la relation bien connue

$$(7) \qquad \rho = p \operatorname{tang} \varphi.$$

Évaluons $\operatorname{tang} \varphi$ : pour cela, soient $l$ la distance du point A à $Og$ et $d$ la hauteur de G au-dessus du plan horizontal de projection. On a évidemment

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{l}{d}.$$

Mais on a aussi, d'autre part,

$$l = a \sin\omega, \quad d = \frac{\mathrm{H}}{2\pi}(\omega - \alpha).$$

En tenant compte de ces relations, et substituant à $p$ et à tang $\varphi$ leur valeur dans la relation (7), on obtient

$$(8) \qquad \rho = \frac{a \sin\omega}{\omega - \alpha},$$

équation polaire de la projection horizontale de la courbe d'ombre.

9. Cette équation, qui rentre dans le type de l'équation (1), va nous permettre de construire géométriquement la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre de la surface de vis. Les formules (3), appliquées à l'équation (8), donnent

$$h = a \cos\omega, \quad k = a \sin\omega.$$

Par suite, on obtient $\mathrm{OP} = h$ (3), en abaissant du point A une perpendiculaire sur le rayon vecteur O$m$, et on a le point I en prolongeant AP d'une longueur égale PI. On a bien, en effet, $\mathrm{PI} = \mathrm{AP} = a \sin\omega = k$. Il résulte de là que, pour avoir la tangente en un point quelconque $m$ de la projection horizontale de la courbe d'ombre, il suffit de joindre ce point au point I, symétrique de A par rapport à O$m$.

On retrouve ainsi très simplement, comme on le voit, une construction déjà connue, que M. de la Gournerie obtient, dans son *Traité de Géométrie descriptive*

(III[e] Partie, p. 148), en se servant du paraboloïde osculateur de la surface de vis ([1]).

10. La longueur OI est évidemment constante et égale à OA : d'où il résulte que le lieu du point I est le cercle décrit du point O comme centre avec OA pour rayon. C'est ce qu'indique aussi tout naturellement la seconde des formules (5), appliquée à l'équation (8).

La construction du point I montre que ce point est le même pour tous les points de la courbe situés sur une même droite O$m$. On arrive à la même conclusion en remarquant, d'après ce que nous avons vu ci-dessus (4), que $f(\omega) = a \sin\omega$ ne varie pas quand on change $\omega$ en $2\pi + \omega$, et change de signe en conservant la même valeur absolue, quand on remplace $\omega$ par $\pi + \omega$, $\varphi(\omega) = -\alpha$ étant une constante.

*Remarque.* — Dans le cas où $\alpha$ est nul, c'est-à-dire où le point lumineux est sur la surface de vis, l'équation (8) se réduit à

$$\rho = \frac{a \sin\omega}{\omega}.$$

Elle est vérifiée, quel que soit $\rho$, pour $\omega = 0$, ce qui signifie que l'axe polaire fait partie de la courbe. En d'autres termes, dans l'espace, la génératrice qui contient le point lumineux fait partie de la ligne d'ombre propre : c'est d'ailleurs évident géométriquement.

11. *Courbe dont la discussion a fait le sujet de la composition de Mathématiques pour l'admissibilité à l'École Polytechnique en* 1879. — Cette courbe a pour

---

([1]) Nous sommes également arrivé, par une autre voie, aux résultats précédents, dans un Mémoire *Sur les faisceaux ponctuels* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 203).

équation en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{\sin\omega}{2\omega - 3\cos\omega},$$

ou, ce qui revient au même,

(9) $$\rho = \frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{\omega - \frac{3}{2}\cos\omega}.$$

Cette équation n'est qu'un cas particulier de la suivante,

(10) $$\rho = \frac{a\sin\omega}{\omega - \alpha - m\cos\omega},$$

dans laquelle $a$, $\alpha$ et $m$ désignent des constantes arbitraires. Nous allons construire la tangente de la courbe qu'elle définit.

L'équation (10) rentre dans le type de l'équation (1): il n'y a qu'à faire dans cette dernière

$$f(\omega) = a\sin\omega, \quad \varphi(\omega) = -\alpha - m\cos\omega,$$

et par suite

$$f'(\omega) = a\cos\omega, \quad \varphi'(\omega) = m\sin\omega.$$

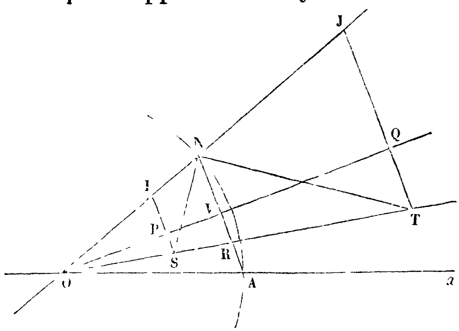
On en conclut

(11) $$h = \frac{a\cos\omega}{1 + m\sin\omega}, \quad k = \frac{a\sin\omega}{1 + m\sin\omega},$$

d'où

$$\frac{k}{h} = \operatorname{tang}\omega.$$

Or, $\frac{k}{h}$ n'est autre chose que la tangente de l'angle formé par OI avec le rayon vecteur OM. Il résulte de là que le point I cherché est situé sur la droite symétrique de l'axe polaire par rapport au rayon vecteur.




**12.** D'autre part, on a

$$\text{(12)} \qquad OI = \frac{PI}{\sin POI} = \frac{h}{\sin\omega} = \frac{a}{1 + m\sin\omega}.$$

Décrivons du point O comme centre, avec un rayon égal à $a$, une circonférence qui coupe en A la partie positive de l'axe polaire et en N le prolongement de OI.

Des égalités (12) on tire

$$\text{(13)} \qquad OI + m\,OI\sin\omega = ON,$$

ou bien, à cause de $OI \sin\omega = IP$,

$$\text{(14)} \qquad mIP = ON - OI = IN.$$

Sur le prolongement de IP, prenons un point S tel que $\frac{IS}{IP} = m$; traçons la droite AN, qui est évidemment perpendiculaire sur le rayon vecteur OM en un certain point V, et prolongeons OS jusqu'à sa rencontre en R avec AN. Les droites ON, OV, OR interceptent sur les deux parallèles IS et NR des segments proportionnels, de sorte que l'on a

$$\frac{NR}{NV} = \frac{IS}{IP} = m.$$

A l'aide de cette relation, on construira immédiatement le point R, et l'on aura, par suite, la droite OS.

Des égalités (13) et (14) on conclut, d'autre part,

$$IS = IN,$$

par suite

$$\widehat{INS} = \widehat{ISN} = \widehat{SNR}.$$

Il suit de là que NS est la bissectrice intérieure de l'angle ONA. On aura donc le point S en prenant l'intersection de cette bissectrice avec la droite OR, et le point I en abaissant du point S une perpendiculaire sur le rayon vecteur et prolongeant cette perpendiculaire jusqu'à sa rencontre en I avec la droite ON.

13. Considérons les points situés sur un même rayon vecteur qui correspondent aux divers angles compris dans la formule $2i\pi + \omega$, $i$ désignant un entier quelconque. Les valeurs de $h$ et de $k$ données par les relations (11) sont les mêmes pour tous ces points. On en conclut que les tangentes à la courbe aux divers points d'un même rayon vecteur qui correspondent aux angles compris dans la formule $2i\pi + \omega$ concourent en un même point I, construit comme nous l'avons vu plus haut (11 et 12).

Si l'on considère maintenant les points du même rayon vecteur qui correspondent aux angles compris dans la formule $(2i + 1)\pi + \omega$, $i$ désignant toujours un entier quelconque, les tangentes en ces nouveaux points sont aussi concourantes, mais ce point de concours J est distinct du point I déterminé plus haut : pour qu'il en fût autrement, il faudrait en effet qu'en remplaçant $\omega$ par $(2i + 1)\pi + \omega$ dans les formules (11), les valeurs de $h$ et de $k$ ne fissent que changer de signe, ce qui n'a pas lieu.

14. Nous allons obtenir le point J par une construction analogue à celle qui nous a donné le point I. On voit d'abord immédiatement que le point J est situé sur la droite OI. En effet, en appliquant ce que nous avons déjà dit plus haut pour le point I, on sait que la droite OJ fait avec $Ox$ un angle double de l'angle formé par le rayon vecteur correspondant avec le même axe, c'est-à-dire un angle égal à $2\pi + 2\omega$; il en résulte que la droite OJ coïncide avec OI, puisque OI est inclinée sur l'axe polaire de l'angle $2\omega$.

La position du point J sur la droite OI est déterminée par la relation (13), dans laquelle il n'y a qu'à remplacer $\omega$ par $\pi + \omega$, ce qui donne

$$\text{OJ} - m\,\text{OJ}\sin\omega = \text{ON}. \tag{15}$$

Cette relation nous montre que le point J est situé au delà de N par rapport à O. Du point J, supposé connu, abaissons JQ perpendiculaire sur le rayon vecteur OM, et prolongeons cette dernière droite jusqu'à son point de rencontre T avec OS prolongée. On a

$$\text{OJ}\sin\omega = \text{JQ},$$

et l'on peut écrire, par suite, la relation (15)

$$m\,\text{JQ} = \text{JN}.$$

D'autre part, on a évidemment

$$\frac{\text{JT}}{\text{JQ}} = \frac{\text{IS}}{\text{IP}} = m,$$

d'où

$$\text{JT} = m\,\text{JQ},$$

et par suite

$$\text{JT} = \text{JN}.$$

Le triangle JNT étant isoscèle, on en conclut

$$\widehat{\text{JNT}} = \widehat{\text{JTN}} = \widehat{\text{TNR}},$$

ce qui indique que NT est la bissectrice de l'angle $\widehat{ANJ}$. De là résulte la détermination du point T, et par suite celle du point J.

15. En résumé, voici la construction des deux points I et J auxquels aboutissent respectivement les tangentes aux divers points de la courbe (10) situés sur un même rayon vecteur et correspondant aux angles polaires $2i\pi + \omega$ et $(2i+1)\pi + \omega$ :

*Du pôle comme centre on décrit un cercle d'un rayon égal à a : A étant le point d'intersection de ce cercle avec la partie positive de l'axe polaire, on prend le point* N *symétrique de* A *par rapport au rayon vecteur* OM *que l'on considère.* V *étant le point d'intersection de* OM *et de* AN, *on porte sur* NA, *à partir du point* N, *un segment* NR *tel que* $\frac{NR}{NV} = m$. *On trace les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle* ONA, *qui rencontrent* OR *respectivement aux points* S *et* T. *Des points* S *et* T *on abaisse* SP *et* TQ *perpendiculaires sur* OM : *ces perpendiculaires prolongées vont couper* ON *aux points* I *et* J *cherchés.*

16. Les points I et J sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points O et N. Cela résulte de ce que, en vertu d'une propriété bien connue des bissectrices d'un angle d'un triangle, S et T sont conjugués harmoniques par rapport à O et à R, et de ce que les droites ST, RN et TJ sont parallèles.

La partie de la droite ON prolongée au delà du point O contient deux points analogues à I et à J, qui correspondent respectivement aux angles compris dans les formules $2i\pi + \frac{\pi}{2} + \omega$ et $(2i+1)\pi + \frac{\pi}{2} + \omega$. La courbe lieu des points I et J a donc quatre points sur une droite quelconque passant par le point O. Les égalités (13) et (15) indiquent d'ailleurs que les points I et J ne se confondent jamais avec le point O. Le lieu des points I et J est, par suite, du quatrième ordre.

L'application des formules (5) ou (6) fournit immédiatement l'équation polaire de ce lieu, qui est

$$\rho = \frac{a}{1 + m \sin \frac{1}{2} \omega}.$$

Si l'on considère les deux valeurs $\rho_1$ et $\rho_2$, données par cette équation pour deux valeurs de $\omega$ différant de $2\pi$, on vérifie aisément la relation

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{a}.$$

On retrouve ainsi la proportion harmonique qui lie les quatre points O, N, I et J.

17. En appliquant les résultats que nous venons d'exposer (11 à 16) au cas particulier de $a = \frac{1}{2}$ $m = \frac{3}{2}$, on obtient la construction de la tangente à la courbe qui a été donnée, comme sujet de composition, pour l'admissibilité à l'École Polytechnique en 1879.

En faisant $m = 0$, on retombe sur le cas de la projection de la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, que nous avons traité directement (8 à 10), et, en appliquant à ce cas particulier la construction de la tangente à la courbe (10), on vérifie facilement que les points I et J se confondent dans ce cas tous les deux avec le point N.

18. On peut généraliser la construction décrite plus haut (15) de façon à la rendre applicable aux courbes définies par une équation de la forme

$$\rho = \frac{a \sin \omega}{\omega - \alpha - m \cos n\omega},$$

$n$ désignant un nombre quelconque.

Nous n'insisterons pas sur cette construction.

On peut aussi construire, par un procédé analogue, la tangente à la courbe

$$\rho = \frac{a}{\omega - \alpha - m \cos \omega},$$

ou, plus généralement,

$$\rho = \frac{a}{\omega - \alpha - m \cos n\omega},$$

$n$ désignant toujours un nombre quelconque. Les exemples que nous avons traités suffisent pour mettre le lecteur sur la voie de la méthode à suivre.