NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

Sur un procédé d'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 202-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__202_1>

SUR UN PROCÉDÉ D'ÉLIMINATION;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Soient deux équations de même degré

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$
$$\varphi(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m = 0.$$

Formons la série des polynômes $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_{m-1}(x)$, $F_m(x)$, savoir :

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(x) = A_0 \varphi(x) - B_0 f(x) \\ \text{ou bien} \\ F_1(x) = G_{1,1} x^{m-1} + G_{1,2} x^{m-2} + \ldots + G_{1,m}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_2(x) = A_0 x F_1(x) - G_{1,1} f(x), \\ \text{ou} \\ F_2(x) = G_{2,1} x^{m-1} + G_{2,2} x^{m-2} + \ldots + G_{2,m}, \end{array}\right.$$

. . . .

$$\left\{\begin{array}{l} F_{m-1}(x) = A_0 x F_{m-2}(x) - G_{m-2,1} f(x) \\ \text{ou} \\ F_{m-1}(x) = G_{m-1,1} x^{m-1} + G_{m-1,2} x^{m-2} + \ldots + G_{m-1,m}, \end{array}\right.$$

et enfin

$$\left\{\begin{array}{l} F_m(x) = A_0 x F_{m-1}(x) - G_{m-1,1} f(x) \\ \text{ou} \\ F_m(x) = G_{m,1} x^{m-1} + G_{m,2} x^{m-2} + \ldots + G_{m,m}. \end{array}\right.$$

Cela posé, si $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ont une racine commune, cette racine est aussi commune aux équations

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad F_{m-1}(x) = 0, \quad F_m(x) = 0.$$

On en conclut que le déterminant Δ des coefficients de ces m équations, considérées comme linéaires en x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x, x^0 est nul.

Nous allons démontrer que la condition $\Delta = 0$ est aussi la condition suffisante pour que les équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ aient une racine commune.

Pour le faire voir, exprimons d'abord le polynôme $F_\mu(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $\varphi(x)$.

A cet effet, considérons les égalités

$$\begin{aligned}
F_\mu(x) &= A_0 x F_{\mu-1}(x) - G_{\mu-1,1} f(x), \\
F_{\mu-1}(x) &= A_0 x F_{\mu-2}(x) - G_{\mu-2,1} f(x), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
F_2(x) &= A_0 x F_1(x) - G_{1,1} f(x), \\
F_1(x) &= A_0 \varphi(x) - B_0 f(x).
\end{aligned}$$

Si l'on élimine $F_{\mu-1}(x)$, $F_{\mu-2}(x)$, ..., $F_1(x)$ entre ces μ équations, en multipliant la première par 1, la deuxième par $A_0 x$, la troisième par $A_0^2 x^2$, etc., et la dernière par $A_0^{\mu-1} x^{\mu-1}$ et en ajoutant, il viendra

$$F_\mu(x) = A_0^\mu x^{\mu-1} \varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x),$$

$\varphi_{\mu-1}$ étant le polynôme de degré $\mu - 1$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mu-1} = G_{\mu-1,1} &+ G_{\mu-2,1} A_0 x + G_{\mu-3,1} A_0^2 x^2 + \ldots \\
&+ G_{1,1} A_0^{\mu-2} x^{\mu-2} + B_0 A_\mu^{-1} x^{\mu-1}.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant Δ est identique à celui qu'on obtient en remplaçant dans Δ les éléments de la dernière colonne par $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_m(x)$, quantités que l'on obtient en multipliant les éléments des diverses colonnes de Δ par x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x^0 et en ajoutant par rangées les éléments ainsi modifiés. On a donc identiquement

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-1} & F_1(x) \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-1} & F_2(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,m-1} & F_m(x) \end{vmatrix},$$

et, en vertu de l'égalité

$$F_\mu(x) = A_0^\mu x^{\mu-1} \varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x),$$

le déterminant Δ pourra s'écrire

$$\Delta = U\varphi(x) - Vf(x),$$

en posant

$$U = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-1} & A_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-1} & A_0^2 x \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,m-1} & A_0^m x^{m-1} \end{vmatrix}$$

et

$$V = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-1} & B_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-1} & \varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,m-1} & \varphi_{m-1} \end{vmatrix}.$$

Les polynômes U et V sont donc de degré $m-1$.

L'identité

$$\Delta = U\varphi(x) - Vf(x)$$

montre que, si $\Delta = 0$, les équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont au moins une racine commune. Par suite, $\Delta = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations proposées aient une racine commune.

2. Si l'équation $\varphi(x)=0$ n'était que de degré $m-1$, il suffirait de prendre pour $F_1(x)$ le polynôme $\varphi(x)$ lui-même, et, si $\varphi(x)$ était de degré p, p étant plus grand que m, on appliquerait le procédé précédent aux équations $f(x)=0$, $\psi(x)=0$, $\psi(x)$ étant le reste de la division de $\varphi(x)$ par $f(x)$.

Comme application de la méthode, formons l'équation qui donne les puissances n des racines d'une équation proposée $f(x)=0$ de degré m.

Il faudra éliminer pour cela x entre les deux équations

$$f(x)=0,$$
$$x^n-y=0.$$

Supposons $m>n$; l'équation $f(x)=0$ pourra s'écrire

$$\varphi_0(x^n)+x\varphi_1(x^n)+x^2\varphi_2(x^n)+\ldots+x^{n-1}\varphi_{n-1}(x^n)=0$$

ou

$$\varphi_0(y)+x\varphi_1(y)+x^2\varphi_2(y)+\ldots+x^{n-1}\varphi_{n-1}(y)=0;$$

par suite, il faudra éliminer x entre les équations

$$x^{n-1}\varphi_{n-1}(y)+x^{n-2}\varphi_{n-2}(y)+\ldots+x\varphi_1(y)+\varphi_0(y)=0,$$
$$x^n-y=0.$$

Les équations $F_1(x)=0$, $F_2(x)=0$, $\ldots$, $F_m(x)=0$ sont, dans ce cas,

$$x^{n-1}\varphi_{n-1}(y)+x^{n-2}\varphi_{n-2}(y)+\ldots+x\varphi_1(y)+\varphi_0(y)=0,$$
$$x^{n-1}\varphi_{n-2}(y)+x^{n-2}\varphi_{n-3}(y)+\ldots+x\varphi_0(y)+y\varphi_{n-1}(y)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x^{n-1}\varphi_0(y)+x^{n-2}y\varphi_{n-1}(y)+\ldots+xy\varphi_2(y)+y\varphi_1(y)=0.$$

Par suite, l'équation en y est

$$\begin{vmatrix} \varphi_{n-1}(y) & \varphi_{n-2}(y) & \ldots & \varphi_1(y) & \varphi_0(y) \\ \varphi_{n-2}(y) & \varphi_{n-3}(y) & \ldots & \varphi_0(y) & y\varphi_{n-1}(y) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_0(y) & y\varphi_{n-1}(y) & \ldots & y\varphi_2(y) & y\varphi_1(y) \end{vmatrix}=0.$$

Dans le cas où $n = m$ et

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

l'équation en y devient

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{m-1} & A_m + A_0 y \\ A_2 & A_3 & \ldots & A_m + A_0 y & A_1 y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ A_m + A_0 y & A_1 y & \ldots & A_{m-2} y & A_{m-1} y \end{vmatrix} = 0.$$