NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Sur la composition des forces dans le plan

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 115-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__115_1>

SUR LA COMPOSITION DES FORCES DANS LE PLAN;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève en Mathématiques spéciales au Lycée Fontanes.

Je me propose de développer dans cette Note une méthode nouvelle pour établir la composition des forces dans le plan.

Cette méthode a l'avantage d'être plus générale que la méthode ordinaire, en ce sens qu'elle rattache directement la composition des forces parallèles à celle des forces quelconques sans qu'il soit besoin de recourir à une démonstration spéciale. Elle met de plus en évidence l'existence d'un point remarquable jouant par rapport aux forces quelconques dans le plan le rôle que remplit le centre des forces parallèles par rapport à celles-ci.

Je dois ajouter que, dans ce qui suit, j'admets comme connue la composition de deux forces concourantes, que je prends pour point de départ et que je fais immédiatement suivre du théorème que voici :

Théorème. — *Si l'on considère dans un plan deux forces appliquées en des points quelconques, et qu'on fasse tourner ces forces d'angles égaux et de même sens autour de leurs points d'application :*

1° *Le point de concours de leurs directions décrit une circonférence ;*

2° *La direction de la résultante passe par un point fixe de cette circonférence ;*

3° *Cette direction tourne du même angle que les composantes.*

La démonstration de ce théorème est assez simple pour que je n'aie pas besoin de la donner ici.

Remarque. — Il résulte de ce théorème que, si l'on prend constamment pour point d'application de la résultante un point de sa direction, fixe par rapport au point de concours des directions des composantes, *ce point d'application se mouvra sur un limaçon de Pascal.*

Centre de composition. — Comme nous pouvons prendre pour point d'application de la résultante des deux forces un point quelconque de sa direction, nous considérerons cette résultante comme constamment appliquée au point de sa direction qui reste fixe, lorsqu'on fait tourner les composantes d'angles égaux et de même sens. Nous appellerons ce point le *centre de composition* des deux forces.

Pour définir géométriquement la position de ce point, considérons dans un plan deux forces F et F' appliquées aux points A et A' et dont les directions se coupent en

D, et soit C le centre de composition de ces deux forces ; d'après ce qui vient d'être dit, ce point se trouve sur la circonférence circonscrite au triangle AA'D. De plus, on a

$$\frac{\sin A'DC}{\sin ADC} = \frac{F}{F'} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \frac{\text{arc } A'C}{2}}{\sin \frac{\text{arc } AC}{2}} = \frac{F}{F'},$$

ou encore

$$\frac{\text{corde } A'C}{\text{corde } AC} = \frac{F}{F'}.$$

Le point C se trouve ainsi déterminé géométriquement.

Considérons maintenant, dans un plan, un nombre quelconque de forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, respectivement appliquées aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nous composerons les forces F_1 et F_2 en la force R_1 appliquée au centre de composition de ces deux forces, puis R_1 et F_3 en la force R_2 appliquée en leur centre de composition, et ainsi de suite jusqu'à R_{n-2}, qui, composée avec F_n, donne la résultante totale R du système de forces considéré, appliquée au centre de composition de R_{n-2} et F_n. Si l'on fait tourner toutes les forces d'angles égaux et de même sens autour de leurs points d'application, R_1 tournera du même angle autour de son point d'application ; par suite, R_2 aussi ; et de même pour les autres, jusqu'à R.

Si l'on opère la composition des n forces de toute autre façon, on voit, en faisant tourner les diverses forces d'angles égaux autour de leurs points d'application, que la résultante totale R tourne aussi de cet angle autour de son point d'application, en sorte que la résultante unique R tourne séparément autour des divers points d'application obtenus en prenant les forces dans des ordres différents, ce qui exige que tous ces points coïncident ; c'est ce point unique que nous appellerons *centre de composition des forces quelconques* considérées, et nous dirons :

Lorsqu'on fait tourner un nombre quelconque de forces situées dans un plan, d'angles égaux et de même sens autour de leurs points d'application, la résultante de ces forces tourne du même angle autour du centre de composition du système.

Composition des forces parallèles. — Considérons deux forces parallèles et de même sens F et F′ appliquées aux points A et A′. Composons ces forces en les considérant comme des forces quelconques. La direction de la résultante passant par le point de concours des directions des deux forces, qui, dans ce cas, est à l'infini, est parallèle à ces directions.

De plus, il résulte de la composition des forces quelconques qu'on a en grandeur la résultante de deux forces, en appliquant en un point quelconque des forces égales et parallèles aux proposées, et en les composant. Cette remarque, appliquée aux forces parallèles F et F′, montre que la grandeur de la résultante est égale à la somme des grandeurs des composantes.

Pour avoir maintenant le point d'application de cette résultante, cherchons le centre de composition de F et de F′. La circonférence circonscrite au triangle formé par les points d'application et le point de concours des directions se réduit, dans le cas considéré, à la droite AA′ et à la droite à l'infini du plan. Le centre cherché est donc sur AA′ et sa position sur cette droite est définie par la relation établie plus haut

$$\frac{\text{corde } A'C}{\text{corde } AC} = \frac{F}{F'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{F}{F'},$$

qui est bien la relation connue.

On passe de là à la composition des forces parallèles et de sens contraires par le procédé connu.

Puis on compose un nombre quelconque de forces parallèles et de même sens, dans un plan, en remarquant que le centre de ces forces parallèles n'est qu'un cas particulier du centre de composition des forces quelconques.

Centre de composition d'un système de points. — Le point auquel Mœbius a donné le nom de *barycentre* d'un système de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n'est autre que le centre des forces parallèles appliquées aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et ayant des grandeurs proportionnelles à $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Le principe qui fait le fond de cette Note conduit dès lors à la généralisation suivante de la notion de barycentre :

Nous appellerons *centre de composition d'un système de points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un plan, affectés respectivement des coefficients linéaires $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et des coefficients angulaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, le centre de composition du système des forces appliquées aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ayant des grandeurs proportionnelles à $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et dont les directions fassent avec une droite fixe du plan des angles, comptés dans le même sens, respectivement égaux à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Tous ces angles doivent être rapportés à une même droite du plan, mais cette droite est d'ailleurs arbitraire; car on voit facilement que passer d'une position de cette droite à une autre revient à faire tourner d'angles égaux autour de leurs points d'application les forces qui définissent la position du centre de composition, de telle sorte que ce centre ne varie pas.

Pour la même raison, le centre de composition ne change pas lorsqu'on donne aux coefficients α_1, α_2, ..., α_n des accroissements égaux.

Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$, le centre de composition devient le barycentre des points considérés.