

CH. BIEHLER

**Sur la transformation du déterminant de
M. Sylvester en celui de Cauchy**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 110-115

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__110_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA TRANSFORMATION DU DÉTERMINANT DE M. SYLVESTER
EN CELUI DE CAUCHY ;**

PAR M. CH. BIEHLER.

Lorsqu'on a deux équations, l'une $f(x) = 0$ de degré m , l'autre $\varphi(x) = 0$ de degré p (nous supposons $p < m$), savoir

(1) $f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0,$

(2) $\varphi(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \dots + B_p = 0,$

on peut exprimer sous deux formes différentes la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux équations aient une racine commune.

L'une d'elles, due à M. Sylvester, s'obtient, comme l'on sait, en égalant à zéro le déterminant d'ordre $m + p$ du système des $m + p$ équations

$$\begin{array}{ll}
x^{p-1} f(x) = 0, & x^{m-1} \varphi(x) = 0, \\
x^{p-2} f(x) = 0, & x^{m-2} \varphi(x) = 0, \\
\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\
x f(x) = 0, & x \varphi(x) = 0, \\
f(x) = 0, & \varphi(x) = 0,
\end{array}$$

considérées comme linéaires en $x^{m+p-1}, x^{m+p-2}, \dots, x, x^0$.

La seconde a été donnée par Cauchy : elle s'obtient en égalant à zéro un déterminant d'ordre m que l'on forme comme il suit. On considère les p équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0 x^{\mu-1} + A_1 x^{\mu-2} + \dots + A_{\mu-1}}{B_0 x^{\mu+p-m-1} + \dots + B_{\mu+p-m-1}} \\ = \frac{A_\mu x^{m-\mu} + A_{\mu+1} x^{m-\mu-1} + \dots + A_m}{B_{\mu+p-m} x^{m-\mu} + B_{\mu+p-m+1} x^{m-\mu-1} + \dots + B_p} \end{array} \right. ,$$

qu'on obtient en donnant à μ les p valeurs $m - p + 1, m - p + 2, \dots, m - 1, m$; on ajoute à ces p équations

de degré $m - 1$ en x les $m - p$ suivantes,

$$\begin{aligned}
x^{m-p-1} \varphi(x) &= 0, \\
x^{m-p-2} \varphi(x) &= 0, \\
\dots\dots\dots, \\
x \varphi(x) &= 0, \\
\varphi(x) &= 0,
\end{aligned}$$

et l'on égale à zéro le déterminant du système de ces m équations considérées comme linéaires en $x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, x, x^0$.

Si l'on désigne, d'une manière générale, par f_μ et φ_μ les polynômes

$$\begin{aligned}
f_\mu &= A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \dots + A_\mu, \\
\varphi_\mu &= B_0 x^{\mu+p-m} + B_1 x^{\mu+p-m-1} + \dots + B_{\mu+p-m},
\end{aligned}$$

l'équation (3) pourra s'écrire

$$\frac{f_{\mu-1}}{\varphi_{\mu-1}} = \frac{A_\mu x^{m-\mu} + \dots + A_m}{B_{\mu+p-m} x^{m-\mu} + \dots + B_p},$$

ou bien

$$\frac{f_{\mu-1}}{\varphi_{\mu-1}} = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

par suite

$$(4) \quad f_{\mu-1} \varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x) = 0.$$

Soit $G_{\mu,\nu}$ le coefficient de $x^{m-\nu}$ dans cette équation ; on aura

$$\begin{aligned}
f_{\mu-1} \varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x) &= G_{\mu,1} x^{m-1} + G_{\mu,2} x^{m-2} + \dots \\
&\quad + G_{\mu,\nu} x^{m-\nu} + \dots + G_{\mu,m}.
\end{aligned}$$

Le déterminant de Cauchy sera donc

$$\begin{vmatrix}
G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & G_{m-p+1,m} \\
G_{m-p+2,1} & G_{m-p+2,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & G_{m-p+2,m} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots \\
G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & G_{m,m} \\
B_0 & B_1 & \dots & \dots & B_p & 0 & 0 \\
0 & B_0 & \dots & \dots & B_{p-1} & B_p & 0 \\
0 & 0 & \dots & B_0 & \dots & \dots & B_p
\end{vmatrix}.$$

Nous allons démontrer que ce déterminant est identique, à un facteur numérique près, à celui de M. Sylvester, savoir

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & \dots & A_{m-1} & A_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & \dots & \dots & A_{m-1} & A_m & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_0 & A_1 & \dots & \dots & A_{m-1} & A_m \\ B_0 & B_1 & \dots & B_p & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & \dots & B_{p-1} & B_p & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & B_0 & \dots & B_{p-1} & B_p \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant renferme les coefficients A dans ses p premières lignes et les coefficients B dans les m dernières.

Pour opérer la transformation de ce déterminant en celui de Cauchy, remplaçons les éléments de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne de Δ , savoir

$$B_0, B_1, \dots, B_p, 0, 0, \dots, 0, 0,$$

par les sommes que l'on obtient en ajoutant entre eux les éléments d'une même colonne de Δ , après avoir multiplié les éléments des lignes successives respectivement par

$$-B_0, -B_1, \dots, -B_{p-1}, A_0, A_1, \dots, A_{m-1};$$

les sommes obtenues sont évidemment les coefficients des diverses puissances de x dans la fonction

$$f_{m-1}\varphi(x) - \varphi_{m-1}f(x).$$

On sait que cette fonction n'est que de degré $m-1$ et que l'on a

$$f_{m-1}\varphi(x) - \varphi_{m-1}f(x) = G_{m,1}x^{m-1} + G_{m,2}x^{m-2} + \dots + G_{m,m};$$

les éléments de la $(p + 1)^{\text{ième}}$ ligne deviennent donc, par cette transformation,

$$0, 0, 0, \dots, 0, G_{m,1}, G_{m,2}, \dots, G_{m,m}.$$

La substitution de ces éléments à la place de ceux de la $(p + 1)^{\text{ième}}$ ligne de Δ a eu pour effet de multiplier le déterminant Δ par A_0 .

Laissant actuellement intacts les éléments de la première et de la $(p + 1)^{\text{ième}}$ ligne, multiplions ceux de la deuxième, troisième, \dots , $p^{\text{ième}}$ respectivement par

$$-B_0, -B_1, \dots, -B_{p-2},$$

ceux de la $(p + 2)^{\text{ième}}$, $(p + 3)^{\text{ième}}$, \dots , $(p + m)^{\text{ième}}$ respectivement par

$$A_0, A_1, \dots, A_{m-2},$$

et remplaçons les éléments de la $(p + 2)^{\text{ième}}$ ligne de Δ par les sommes qu'on obtient en ajoutant par colonnes les éléments ainsi modifiés; ces sommes sont les coefficients des diverses puissances de x dans la fonction

$$f_{m-2}\varphi(x) - \varphi_{m-2}f(x),$$

qui est égale à

$$G_{m-1,1}x^{m-1} + G_{m-1,2}x^{m-2} + \dots + G_{m-1,m}.$$

Cette substitution a encore pour effet de multiplier Δ par A_0 .

En laissant maintenant intacts les éléments des deux premières lignes et ceux de la $(p + 1)^{\text{ième}}$ et de la $(p + 2)^{\text{ième}}$, multiplions ceux des troisième, quatrième, cinquième, \dots , $p^{\text{ième}}$ rangées respectivement par $-B_0$, $-B_1, \dots, -B_{p-3}$, ceux des $(p + 3)^{\text{ième}}$, \dots , $(p + m)^{\text{ième}}$ par $+A_0, A_1, \dots, A_{m-3}$, et ajoutons les éléments modifiés par colonnes; on obtient les éléments

$$0, 0, \dots, 0, G_{m-2,1}, G_{m-2,2}, \dots, G_{m-2,m}.$$

Après p opérations analogues, les $(p + 1)^{\text{ième}}$, $(p + 2)^{\text{ième}}$, ..., $(2p)^{\text{ième}}$ rangées de Δ auront été remplacées par

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & G_{m,1}, & G_{m,2}, \dots, G_{m,m}, \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & G_{m-1,1}, & G_{m-1,2}, \dots, G_{m-1,m}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & G_{m-p+1,1}, & G_{m-p+1,2}, \dots, G_{m-p+1,m}. \end{array}$$

Les $m - p$ dernières rangées de Δ n'auront pas varié, et Δ aura été multiplié par A_0^p ; on aura donc

$$A_0^p \Delta = \begin{array}{|cccccccc} A_0 & A_1 & \dots & A_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & \dots & A_{m-1} & A_m & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 & \dots & \dots & A_{m-1} & A_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,m-1} & G_{m,m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & G_{m-1,m-1} & G_{m-1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \dots & G_{m-p+1,m-1} & G_{m-p+1,m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_0 & B_1 & \dots & B_p & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & B_0 & \dots & B_p & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & B_0 & \dots & B_p \end{array}$$

Si l'on supprime de part et d'autre le facteur A_0^p , il viendra

$$\Delta = \begin{array}{|ccccccc} G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & \dots & \dots & G_{m,m} \\ G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & \dots & \dots & G_{m-1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \dots & \dots & \dots & G_{m-p+1,m} \\ B_0 & B_1 & \dots & B_p & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & \dots & B_{p-1} & B_p & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & B_0 & \dots & \dots & B_p \end{array}$$

Le second membre est identique au déterminant de Cauchy, abstraction faite du facteur $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$.

Si donc on désigne par Δ_1 le déterminant de Cauchy, on aura

$$\Delta = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \Delta_1.$$

M. Ventéjol, dans un Mémoire sur l'élimination (15 février 1877), a donné une méthode pour opérer cette transformation. M. Ventéjol effectue la transformation sur un exemple particulier, ce qui ne montre peut-être pas assez la généralité de la proposition; il m'a paru intéressant de donner une démonstration générale, qui met mieux en évidence le principe de la méthode.