

A. TOURRETTES

**Solution d'une question de licence
(1875) (faculté de Paris)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 18
(1879), p. 97-101

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__97_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE (1875)

(FACULTE DE PARIS);

PAR M. A. TOURRETTES.

Un point matériel pesant assujéti à rester sur une sphère de rayon a est attiré proportionnellement à la distance par un point B situé sur la verticale Oz du centre de la sphère, à une distance $OB = b$ de ce centre. On donne la valeur μ de l'attraction à l'unité de distance, l'intensité g de la pesanteur, la vitesse initiale k du point mobile, laquelle est supposée horizontale, et enfin la distance h de ce point au plan horizontal xOy qui passe par le centre de la sphère.

On demande : 1° les limites entre lesquelles variera, pendant le mouvement, l'ordonnée z du mobile; 2° de déterminer complètement ce mouvement dans le cas particulier où l'attraction du point B sur le centre de la sphère est égale et contraire à la pesanteur.

Soient m la masse de A, 1 celle de B, N la pression sur la sphère, les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu x + \frac{N}{m} \frac{x}{a},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu y + \frac{N}{m} \frac{y}{a},$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu(z - b) - g + \frac{N}{m} \frac{z}{a}.$$

Multipliant la première par y et la deuxième par x , puis retranchant les résultats, on trouve

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

d'où

$$(1) \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C.$$

C'est une première équation, celle qu'on obtiendrait en appliquant le principe des aires. En multipliant respectivement par $2dx$, $2dy$, $2dz$ et ajoutant, il vient, après des réductions évidentes,

$$dv^2 = 2(\mu b - g) dz,$$

d'où

$$(2) \quad v^2 = C' + 2(\mu b - g) z.$$

Ces deux équations avec celle de la sphère

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

suffisent pour déterminer le mouvement.

Il faut maintenant trouver la valeur des constantes en fonction des données initiales.

La vitesse k étant horizontale se projette sur xOy suivant une perpendiculaire à la projection de OA . Soit r cette projection et φ son angle avec Ox ; on aura

$$r \frac{d\varphi}{dt} = k,$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = rk = C.$$

Mais à l'origine du mouvement $r = \sqrt{a^2 - h^2}$: donc

$$C = k\sqrt{a^2 - h^2}.$$

Pour déterminer C' , il suffit de faire $v^2 = k^2$ et $z = h$,

$$C' = k^2 - 2(\mu b - g)h.$$

Par conséquent, les équations (1) et (2) deviennent

$$(4) \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = k\sqrt{a^2 - h^2}$$

$$(5) \quad v^2 = k^2 + 2(\mu b - g)(z - h).$$

L'équation (3) donne

$$x dx + y dy + z dz = 0$$

ou

$$(6) \quad x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = -z \frac{dz}{dt}.$$

Ajoutant (4) et (5) après les avoir élevées au carré, il vient

$$(x^2 + y^2) \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = k^2(a^2 - h^2) + z^2 \frac{dz^2}{dt^2}.$$

Remplaçant $x^2 + y^2$ par $a^2 - z^2$, $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ par $k^2 + 2(\mu b - g)(z - h) - \frac{dz^2}{dt^2}$, il vient facilement

$$(7) \quad a \frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{2(\mu b - g)(z - h)(a^2 - z^2) - k^2(z^2 - h^2)}.$$

Cette équation donnera z en fonction de t ; mais l'intégration n'est pas possible généralement.

Cherchons les limites de z . Pour cela, il faut égaliser le radical à zéro. Nous apercevons immédiatement le facteur $z - h$; ainsi $z = h$ est une des limites; ce qui était facile à prévoir, puisque, quand $z = h$, la vitesse est horizontale et par suite $dz = 0$. En décrivant par $z - h$ le polynôme sous le radical, il vient

$$(8) \quad 2(\mu b - g)z^2 + k^2z - 2(\mu b - g)a^2 + k^2h = 0.$$

Si l'on substitue $-a$ et $-\infty$, on trouve $-k^2(a^2 - h^2)$ et $+\infty$; donc il y a une racine négative qu'il faut rejeter. L'autre racine sera donc la seconde limite, et, puisque le point est sur la sphère, elle sera nécessairement plus petite que a en valeur absolue.

En résolvant (8), on trouve

$$z = \frac{-k^2 \pm \sqrt{k^4 - 8(\mu b - g)[k^2h - 2(\mu b - g)a^2]}}{2(\mu b - g)}.$$

La deuxième limite sera $z' = \frac{-k^2 + \sqrt{\dots}}{2(\mu b - g)}$.

L'autre racine étant nécessairement négative, il faut $\mu b - g \geq 0$.

Je vais maintenant examiner le cas particulier où l'attraction du point B sur le centre de la sphère est égale et contraire à la pesanteur.

Dans ce cas, $\mu b = g$ et, par suite,

$$a \frac{dz}{dt} = \pm k \sqrt{h^2 - z^2},$$

d'où

$$dt = - \frac{a dz}{k \sqrt{h^2 - z^2}}.$$

On prend le signe —, parce que z commence par diminuer quand t augmente; il faudra au contraire prendre le signe + quand le mobile aura atteint la deuxième limite.

L'équation ci-dessus s'intègre immédiatement et donne

$$t = \frac{a}{k} \arccos \frac{z}{h},$$

sans constante.

On en tire

$$(8) \quad z = h \cos \frac{kt}{a}.$$

Maintenant, l'équation (4) peut s'écrire

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = k \sqrt{a^2 - h^2},$$

où $r^2 = a^2 - z^2$; par suite,

$$d\varphi = \frac{k \sqrt{a^2 - h^2} dt}{a - h^2 \cos^2 \frac{kt}{a}},$$

dont l'intégrale est

$$(9) \quad \varphi = \text{arc tang} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - h^2}} \text{tang} \frac{kt}{a} \right).$$

La constante est nulle; on trouvera le détail de l'intégration dans les *Exercices* de Frenet, nos 348, 349.

Si l'on veut l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan xOy , il faut éliminer t entre (9) et

$$r^2 = a^2 - z^2 = a^2 - h^2 \cos^2 \frac{kt}{a},$$

ce qui donne

$$r = \frac{a \sqrt{a^2 - h^2}}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + (a^2 - h^2) \sin^2 \varphi}}$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$a^2 x^2 + (a^2 - h^2) y^2 = a^2 (a^2 - h^2).$$

C'est une ellipse ayant pour axes $\sqrt{a^2 - h^2}$ et a .

Remarque. — Dans le cas particulier que je viens d'examiner, la deuxième limite de z est $-h$; par suite, la durée de la descente du mobile est $\frac{a\pi}{k}$. Cela posé, pour représenter le mouvement ascendant, il faut se servir de

$$dt = + \frac{a}{k} \frac{dz}{\sqrt{h^2 - z^2}}, \quad \text{d'où} \quad t = C'' + \frac{a}{k} \text{arc sin} \frac{z}{h}.$$

On pose $t = \frac{a\pi}{k}$ pour $z = -h$; il vient pour C''

$$C'' = - \frac{\pi}{2} \frac{a}{k};$$

par suite,

$$\frac{z}{h} = \text{arc sin} \left(\frac{kt}{a} + \frac{\pi}{2} \right) = \text{arccos} \frac{kt}{a}.$$

Ainsi la formule (8) représente tout le mouvement; il en est de même de (9), qui en est une conséquence.