

WORMS DE ROMILLY

Sur l'équation du second ordre

$$My'' + Ny'^2 = f(x)$$

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 18
(1879), p. 77-85

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__77_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉQUATION DU SECOND ORDRE

$$Myy'' + Ny'^2 = f(x)$$

(Solution de la question 1289);

PAR M. WORMS DE ROMILLY,

Ingénieur des Mines.

Lorsque les coefficients M et N de l'équation

$$(1) \quad Myy'' + Ny'^2 = f(x)$$

ont pour valeurs $M = 3$, $N = -2$, et que $f(x)$ est un polynôme du second degré, on sait ramener l'intégration de cette équation à des quadratures

$$\int \frac{du}{u\sqrt{\Delta + 4\alpha u - u^3}}, \quad \int f_1(x) dx,$$

Δ étant une certaine fonction des coefficients de $f(x)$ et α une constante arbitraire.

Nous nous proposons d'examiner à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients et le second membre de l'équation différentielle (1) pour que le problème puisse être ramené à l'intégration d'une expression de la forme

$$(2) \quad \frac{du}{\sqrt{\varphi + C\psi}} = F(x) dx,$$

φ et ψ étant des fonctions de u , et C une constante arbitraire.

Mettons l'équation proposée sous une autre forme en y , remplaçant y par $uf^n(x)$, u étant une nouvelle fonction de x ; en effectuant les calculs, on trouve

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &uu'' + \frac{N}{M}u'^2 + \frac{2n(M+N)}{M} \frac{f'}{f} uu' \\ &+ \frac{[Mn(n-1) + Nn]f'^2 + Mnf f''}{Mf^2} u^2 - \frac{f^{1-2n}}{M} = 0. \end{aligned} \right.$$

Prenons la relation (2), nous pouvons en déduire une seconde équation en différentiant les deux membres par rapport à x ; éliminons la constante arbitraire C entre ces deux équations, il vient

$$(4) \quad uu'' - \frac{\psi' u}{2\psi} u'^2 - \frac{F'}{F} uu' - \frac{F^2}{2} \left(\varphi' - \frac{\varphi \psi'}{\psi} \right) u = 0,$$

dans laquelle φ' et ψ' représentent les dérivées de φ et de ψ par rapport à u , tandis que les autres dérivées sont prises par rapport à x . Nous devons chercher les conditions nécessaires pour que les équations (3) et (4) soient identiques.

Le coefficient de u'^2 doit être indépendant de u ; il faut donc, en désignant par a le rapport $-\frac{N}{M}$, que

$$(5) \quad \frac{\psi' u}{\psi} = 2a, \quad \psi = u^{2a} = u^{-\frac{2N}{M}}.$$

Les troisièmes termes donneront la relation

$$\frac{2n(M+N)}{M} \frac{f'}{f} = -\frac{F'}{F},$$

c'est-à-dire, en désignant par A une constante arbitraire,

$$(6) \quad F = A f^{-\frac{2n(M+N)}{M}},$$

qui déterminera F en fonction de f .

Sur les termes suivants, nous pouvons faire plusieurs hypothèses; mais, en tout cas, il faut toujours que $\frac{f^{1-2n}}{M}$ et $\frac{F^2}{2}$ soient égaux, et, comme nous avons déjà trouvé entre ces deux quantités la relation (6), on voit qu'il faudra satisfaire aux équations de condition

$$1 - 2n = \frac{4n'(M+N)}{M}, \quad \frac{1}{M} = \frac{A^2}{2}.$$

d'où l'on tire

$$(7) \quad n = -\frac{M}{2(M+2N)}, \quad A = \sqrt{\frac{2}{M}}.$$

I. (a) Supposons que

$$(8) \quad [M(n-1) + N\kappa]f'^2 + Mff'' = 0;$$

la fonction f sera de la forme

$$(9) \quad f = (Bx + H)^{-\frac{2(M+N)}{M}},$$

d'où l'on tire, pour F , la valeur $\sqrt{\frac{2}{M}}(Bx + H)^{-2}$.

Nous devons, en outre, satisfaire à la relation

$$u\left(\varphi' - \varphi \frac{\psi'}{\psi}\right) = 1 = u\varphi' - 2a\varphi,$$

en remplaçant ψ par sa valeur (5). Cette équation s'intègre facilement et donne

$$\varphi = \gamma u^{2a} - \frac{1}{2a}.$$

Nous voyons donc que l'équation

$$(10) \quad My'' + Ny'^2 = (Bx + H)^p$$

se ramène à des quadratures de la forme (2), en posant

$$\gamma = u(Bx + H)^{\frac{M}{M+N}},$$

$$a = -\frac{N}{M}, \quad \varphi + C\psi = u^{2a}(\gamma + C) - \frac{1}{2a},$$

lorsque p satisfera à l'équation de condition que l'on trouve en égalant les exposants des seconds membres des équations (9) et (10), et qui peut se mettre sous la forme

$$M(p+2) + N(p+4) = 0.$$

(b) Si les coefficients M et N satisfont à la condi-

tion

$$M + N = 0,$$

la relation (8) donnera, pour f , une expression de la forme

$$e^{Bx+H};$$

la valeur de φ sera d'ailleurs encore donnée par la même relation que dans le cas précédent et F sera une constante. On aura donc

$$My'' + Ny'^2 = e^{Bx+H}, \quad y = ue^{\frac{Bx+H}{2}}, \quad F = \sqrt{\frac{2}{M}},$$

$$a = 1, \quad \varphi + C\psi = u^2(\gamma + C) - \frac{1}{2}, \quad M + N = 0.$$

(c) L'équation (8) est encore satisfaite dans le cas où $f(x)$ est une constante K ; on a alors

$$F = \sqrt{\frac{2}{M}} K^{\frac{M+N}{M+2N}}, \quad y = u K^{-\frac{M}{2(M+2N)}},$$

et φ sera encore donné par la même relation.

II. Cherchons maintenant à identifier les derniers termes des équations (3) et (4) sans supposer nul le coefficient de u^2 . Il faudra avoir

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{[Mn(n-1) + Nn^2]f'^2 + Mnf f''}{Mf'^2} u^2 - \frac{f^{1-m}}{M} \\ & = -\frac{F^2}{2} \left(\varphi' - \varphi \frac{\psi'}{\psi} \right) u. \end{aligned} \right.$$

Comme f et F ne sont fonctions que de x , et que φ et ψ ne sont fonctions que de u , cette identité ne peut avoir lieu que si les trois équations

$$\frac{F^2}{2} = \frac{f^{1-2n}}{M} = -\frac{[Mn(n-1) + Nn^2]f'^2 + Mnf f''}{M\alpha f'^2},$$

$$\left(\varphi' - \varphi \frac{\psi'}{\psi} \right) u = \alpha u^2 + 1,$$

ou, en tenant compte des relations (5), (6) et (7),

$$(12) \quad u\varphi' - 2a\varphi = \alpha u^2 + 1,$$

$$(13) \quad [Mn(n-1) + Nn^2]f'^2 + Mnf f'' + \alpha f^{3-2n} = 0.$$

(d) Prenons d'abord le cas où

$$M(n-1) + Nn = 0,$$

qui nous donne avec (7) l'équation de condition

$$3M + 5N = 0,$$

L'équation (13) se réduit, en remplaçant n , M par leurs valeurs en fonction de M , à

$$(14) \quad \frac{25}{6} N f'' + \alpha f^{-3} = 0,$$

qui donne

$$(15) \quad f^2 = (Bx + D)^2 - \frac{6\alpha}{25NB^2},$$

et φ , déduit de l'équation (12), est égal à

$$\varphi = \gamma u^{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{\alpha u^2}{2(1-a)},$$

a étant égal à $\frac{3}{5}$; on peut disposer de α de manière que le second membre de la relation (15) soit la racine carrée d'un trinôme quelconque du second degré, et il faudra substituer à α cette valeur déterminée dans l'expression de $\varphi + C\psi$, qui est

$$\varphi + C\psi = u^{\frac{1}{5}}(\gamma + C) + \frac{5}{4} \alpha u^2 - \frac{5}{3}.$$

Il est possible de satisfaire à l'équation (13) en prenant pour f une puissance p d'un polynôme entier $\theta(x)$; en effectuant la substitution, on trouve

$$(16) \quad [(M+N)n^2p^2 - Mnp]\theta'^2 + Mnp\theta\theta'' + \alpha\theta^{p+2-2np} = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faut que θ soit au plus du second degré; car, si l'on désigne par m le degré de θ , le premier membre est du degré $2m - 2$ et le second membre a pour degré un multiple de m . L'équation $2m - 2 = m'm$ n'admet que les solutions entières

$$\left\{ \begin{array}{l} m' = 0, \\ m = 1, \quad m = 2, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m' = 1, \\ m = 2. \end{array} \right.$$

Posons donc

$$\theta(x) = Bx^2 + Dx + E.$$

La relation (16) donne, en prenant, pour abrégér,

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} (M + N)n^2p^2 - Mnp = \rho, \quad Mnp = \sigma, \\ \rho(2Bx + D)^2 + 2B\sigma(Bx^2 + Dx + E) \\ \quad + \alpha(Bx^2 + Dx + E)^{p+2-2np} = 0, \end{array} \right.$$

avec l'une des conditions

$$(18) \quad p - 2np + 2 = 1,$$

$$(19) \quad p - 2np + 2 = 0.$$

(e) Examinons d'abord le premier cas; en exprimant que les facteurs de chaque puissance de x dans (17) sont nuls, on trouve que l'on doit avoir

$$D^2 - 4BE = 0,$$

c'est-à-dire que θ est un carré. Prenons donc

$$\theta = (bx + d)^2;$$

l'équation (17) devient, en supprimant un facteur commun à tous les termes,

$$2b^2(2\rho + \sigma) + \alpha = 0.$$

D'autre part, l'équation (18) combinée avec (7) con-

duit à

$$(20) \quad M(2p+1) + N(2p+2) = 0.$$

Les quantités que nous avons désignées par ρ et σ sont liées par la relation

$$M^2(\rho + \sigma) = (M + N)\sigma^2,$$

et, si l'on remplace σ par sa valeur Mnp , dans laquelle n et p sont exprimables en M et N , on trouve enfin pour α

$$\alpha = \frac{b^2 M^2}{4(M+N)}.$$

Quant à φ , il sera encore donné par l'équation (12), dont nous avons indiqué précédemment l'intégrale.

Nous avons donc le moyen de ramener à une quadrature l'intégration de

$$My'' + Ny'^2 = (bx + d)^{2p},$$

lorsque M, N, p sont liés par l'équation de condition (20).

(f) Passons au cas où la relation (19) est satisfaite. Elle peut se mettre sous la forme

$$M(p+1) + N(p+2) = 0;$$

et l'équation (17) sera identiquement nulle si l'on a

$$2\rho + \sigma = 0, \quad \rho D^2 + 2BE\sigma + \alpha = 0,$$

qui donnent pour α la valeur

$$\alpha = \frac{M^2(D^2 - 4BE)}{4(M+N)}.$$

On trouvera pour φ la même valeur que précédemment.

En résumé, lorsque, dans l'équation

$$My'' + Ny'^2 = f(x),$$

$M, N, f(x)$ satisfont à l'une des conditions suivantes :

- (a) $f(x) = (Bx + H)^p, \quad M(p+2) + N(p+4) = 0,$
 (b) $f(x) = e^{Bx+H}, \quad M + N = 0,$
 (c) $f(x) = \text{const.} = K, \quad M, N \text{ quelconques},$
 (d) $f(x) = \left[(Bx + D)^2 - \frac{6x}{25NB'} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad 3M + 5N = 0,$
 (e) $f(x) = (bx + d)^{2p}, \quad M(2p+1) + N(2p+2) = 0,$
 (f) $f(x) = (Bx^2 + Dx + E)^p, \quad M(p+1) + N(p+2) = 0,$

l'intégration peut être faite ou du moins ramenée à des quadratures et mise sous la forme

$$F dx = \frac{du}{\sqrt{\varphi + Cu^{-\frac{N}{M}}}},$$

dans laquelle C est une constante arbitraire et φ une fonction de la forme

$$\varphi = \gamma u^{-\frac{N}{M}} + \beta u^2 + \delta.$$

Les exposants de u seront souvent fractionnaires, mais on pourra les ramener à la forme entière en prenant $u = v^m$ et attribuant à m une valeur convenable.

Remarquons que, si dans le cas (f) on prend

$$M = p + 2, \quad N = -(p + 1),$$

l'équation de condition sera satisfaite. Ce cas particulier donne la solution de la question n° 1289. Si, dans l'équation proposée, on remplace y par $v^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$2Mvv'' + (M - N)v'^2 - 4vf'(x) = 0.$$

Si l'on met à la place de y l'expression $v^{\frac{M}{M+N}}$, on trouve

$$\frac{M^2}{M+N} v^{\frac{M-N}{M+N}} v'' = f(x).$$

Enfin, dans le cas (f) , prenons la fonction θ comme variable indépendante; nous aurons, en désignant par Δ et K deux quantités quelconques constantes,

$$(\Delta + 2\theta) \left[My \frac{d^2 y}{d\theta^2} + N \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right] + My \frac{dy}{d\theta} = K\theta^\rho.$$

Ces diverses équations pourront être ramenées à des quadratures lorsque M , N , $f(x)$ satisferont à l'une des conditions (a) , (b) , (c) , (d) , (e) , (f) .