

ÉDOUARD LUCAS

Sur l'équation indéterminée biquadratique

$$Ax^4 + By^4 = Cz^2$$

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 18
(1879), p. 67-74

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__67_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE BIQUADRATIQUE

$$Ax^4 + By^4 = Cz^2;$$

PAR M. ÉDOUARD LUCAS,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

L'analyse indéterminée des équations biquadratiques est peu avancée; Fermat a indiqué, le premier, le moyen de trouver, en général, une série indéfinie de solutions entières de l'équation

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = z^2,$$

lorsque l'un des coefficients extrêmes est un carré parfait, ou encore lorsque l'on connaît une première solution.

Dans le cas particulier de l'équation

$$x^4 + ax^2y^2 + by^4 = z^2,$$

on obtient, en général, une série indéfinie de solutions nouvelles, par les formules suivantes, déduites du procédé de Fermat, et données par Lebesgue :

$$X = x^4 - by^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 - (a^2 - 4b)x^4y^4.$$

L'application de ces formules devient illusoire dans certains cas, et ainsi, par exemple, pour l'équation

$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = z^2,$$

à laquelle on est conduit lorsque l'on cherche à déterminer quatre carrés en progression arithmétique.

Le but de cette Note est de montrer que, lorsque l'on connaît une première solution de l'équation proposée, on obtient *deux* solutions nouvelles, et non une seule; nous observerons, de plus, que les formules que nous allons démontrer permettent de résoudre *complètement* l'équation proposée, pour certaines valeurs des coefficients A, B et C, et en particulier pour *toutes* les équations biquadratiques dont on connaît actuellement la résolution complète.

Considérons d'abord l'équation

$$(1) \quad X^4 + \lambda Y^4 = (1 + \lambda) Z^2,$$

dans laquelle nous désignerons, pour abréger, $1 + \lambda$ par ρ . On vérifie l'équation (1) en posant

$$(2) \quad \begin{cases} X^2 = p^2 - \lambda q^2 - 2\lambda pq, \\ Y^2 = p^2 - \lambda q^2 + 2pq, \\ Z = p^2 + \lambda q^2. \end{cases}$$

La première équation du système (2) peut s'écrire

$$(p - \lambda q)^2 - X^2 = \lambda \rho q^2;$$

on peut donc poser

$$p - \lambda q \pm X = 2\lambda \rho r^2,$$

$$p - \lambda q \mp X = 2s^2,$$

$$q = 2rs,$$

d'où l'on déduit

$$(3) \quad \begin{cases} \pm X = \lambda \rho r^2 - s^2, \\ p = \lambda \rho r^2 + s^2 + 2\lambda rs. \end{cases}$$

La seconde équation du système (2) peut s'écrire

$$(p + q)^2 - Y^2 = \rho q^2;$$

on peut donc poser

$$p + q = Y = 2\rho r'^2,$$

$$p + q = Y = 2s'^2,$$

$$q = 2r's';$$

d'où l'on déduit

$$(4) \quad \begin{cases} Y = \rho r'^2 - s'^2, \\ p = \rho r'^2 + s'^2 - 2r's'. \end{cases}$$

En égalant les valeurs de p données par les systèmes (3) et (4), on obtient

$$\lambda \rho r^2 + s^2 + 2\lambda rs = \rho r'^2 + s'^2 - 2r's',$$

$$rs = r's'.$$

Posons $nr' = mr$ et $ns = ms'$, nous obtenons, par l'élimination de r' et de s , l'équation quadratique en $m : n$

$$m^2(s'^2 - \rho r^2) + 2\rho rs' mn + n^2(\lambda \rho r^2 - s'^2) = 0;$$

pour que la valeur de $m : n$ soit rationnelle, on doit avoir

$$\rho^2 r^2 s'^2 + (s'^2 - \rho r^2)(s'^2 - \lambda \rho r^2) = H^2,$$

ou bien

$$(5) \quad s'^4 + \lambda \rho^2 r^4 = H^2,$$

et, en même temps,

$$m = -\rho rs' \pm H, \quad n = s'^2 - \rho r^2.$$

L'équation (5) donne, par décomposition,

$$H \pm s'^2 = 2\rho^2 z^4,$$

$$H \mp s'^2 = 8\lambda v^4,$$

$$r = 2vz;$$

par suite, en prenant les signes supérieurs,

$$\rho^2 z^4 - 4\lambda v^4 = s'^2;$$

cette dernière équation donne encore

$$\rho z^2 \pm s' = 2x^4,$$

$$\rho z^2 \mp s' = 2\lambda y^4,$$

$$v = xy,$$

et, par addition,

$$x^4 + \lambda y^4 = \rho z^2;$$

on retrouve ainsi l'équation (1).

Par conséquent, d'une première solution (x, y, z) de l'équation

$$(A) \quad x^4 + \lambda y^4 = \rho z^2,$$

on obtiendra deux solutions nouvelles par les formules

$$(B) \quad \begin{cases} m = 4\lambda x^4 y^4 + \rho^2 z^4 \pm 2\rho xyz(x^4 - \lambda y^4), \\ n = (x^4 - \lambda y^4)^2 - 4\rho x^2 y^2 z^2, \\ X = 4\lambda \rho n^2 x^2 y^2 z^2 - m^2(x^4 - \lambda y^4)^2, \\ Y = 4\rho m^2 x^2 y^2 z^2 - n^2(x^4 - \lambda y^4)^2, \\ Z = [4\lambda \rho n^2 x^2 y^2 z^2 + m^2(x^4 - \lambda y^4)^2 \\ \quad + 4\lambda mnxyz(x^4 - \lambda y^4)]^2 \\ \quad + 4\lambda m^2 n^2 x^2 y^2 z^2 (x^4 - \lambda y^4)^2. \end{cases}$$

Si l'on remplace, dans les formules précédentes, λ par $\frac{\mu}{\lambda}$, on obtiendra deux solutions nouvelles de l'équation

$$(6) \quad \lambda x^4 + \mu y^4 = (\lambda + \mu) z^2,$$

à l'aide d'une première, par les formules

$$(7) \quad \begin{cases} m = 4\lambda \mu x^4 y^4 + (\lambda + \mu)^2 z^4 \pm 2(\lambda + \mu)xyz(\lambda x^4 - \mu y^4), \\ n = (\lambda x^4 - \mu y^4)^2 - 4\lambda(\lambda + \mu)x^2 y^2 z^2, \\ X = 4\mu(\lambda + \mu)n^2 x^2 y^2 z^2 - m^2(\lambda x^4 - \mu y^4)^2, \\ Y = 4\lambda(\lambda + \mu)m^2 x^2 y^2 z^2 - n^2(\lambda x^4 - \mu y^4)^2, \\ Z = \dots\dots\dots \end{cases}$$

(71)

L'équation (6) est vérifiée pour $x = y = z = \pm 1$;
on a donc les deux solutions nouvelles

$$(8) \quad \begin{cases} m = 4\lambda\mu + (\lambda + \mu)^2 \pm 2(\lambda^2 - \mu^2), \\ n = (\lambda - \mu)^2 - 4\lambda(\lambda + \mu), \\ X = 4\mu(\lambda + \mu)n^2 - m^2(\lambda - \mu)^2, \\ Y = 4\lambda(\lambda + \mu)m^2 - n^2(\lambda - \mu)^2, \\ Z = \dots\dots\dots; \end{cases}$$

ainsi l'équation

$$3x^4 - 2y^4 = z^2$$

est vérifiée par les solutions

$$\begin{aligned} x_1 &= 33, & y_1 &= 13, & z_1 &= 1871, \\ x_2 &= 28577, & y_2 &= 8843, & z_2 &= 1410140689; \end{aligned}$$

de même, de la solution

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 11$$

de l'équation

$$3x^4 - y^4 = 2z^2$$

on déduit les deux solutions

$$\begin{aligned} x_2 &= 19, & y_2 &= 25, & z_2 &= 13, \\ x_3 &= 449, & y_3 &= 167, & z_3 &= 246121; \end{aligned}$$

de même, les premières solutions de l'équation

$$x^4 + 3y^4 = z^2$$

sont

$$\begin{aligned} x &= 1, \quad 1, \quad 11, \quad 47, \quad 7199, \quad \dots, \\ y &= 1, \quad 2, \quad 3, \quad 28, \quad 8052, \quad \dots, \\ z &= 2, \quad 7, \quad 122, \quad 2593, \quad 12259565, \quad \dots \end{aligned}$$

et les premières solutions de l'équation

$$x^4 + 2y^4 = 3z^2$$

(72)

sont

$$\begin{aligned}x_1 &= 23, & \gamma_1 &= 11, & z_1 &= 321, \\x_2 &= 2375, & \gamma_2 &= 6227, & z_2 &= 31827137.\end{aligned}$$

Revenons maintenant à l'équation proposée

$$AX^4 + BY^4 = CZ^2;$$

en admettant une première solution (x_0, y_0, z_0) , on peut l'écrire

$$A x_0^4 \left(\frac{X}{x_0} \right)^4 + B y_0^4 \left(\frac{Y}{y_0} \right)^4 = C z_0^2 \left(\frac{Z}{z_0} \right)^2,$$

et, si l'on pose

$$A x_0^4 = \lambda, \quad B y_0^4 = \mu, \quad C z_0^2 = \lambda + \mu,$$

on la ramène à l'équation (6), en prenant pour variables les quotients $\frac{X}{x_0}, \frac{Y}{y_0}, \frac{Z}{z_0}$. Par une analyse plus approfondie, il est facile de montrer que les formules (7) permettent de résoudre *complètement* les équations biquadratiques suivantes :

$$\begin{aligned}x^4 - 2y^4 &= -z^2, & 4x^4 - 3y^4 &= z^2, \\x^4 + 8y^4 &= z^2, & x^4 - 12y^4 &= z^2, \\4x^4 - y^4 &= 3z^2, & 3x^4 - 2y^4 &= z^2, \\9x^4 - y^4 &= 8z^2, & x^4 - 6y^4 &= z^2, \\27x^4 - 2y^4 &= z^2, & x^4 - 216y^4 &= z^2, \\x^4 - 36y^4 &= z^2, & x^4 + 24y^4 &= z^2, \\x^4 - y^4 &= 24z^2, & x^4 + 2y^4 &= 3z^2, \\3x^4 - y^4 &= 2z^2, & x^4 - 18y^4 &= z^2, \\x^4 + 3y^4 &= z^2, & x^4 - 72y^4 &= z^2, \\x^4 - 54y^4 &= z^2,\end{aligned}$$

Ces équations représentent toutes celles dont les coefficients ne contiennent que les facteurs 2 et 3, et dont la solution est possible. On peut, de même, résoudre

complètement un très-grand nombre d'autres équations de la forme proposée. Lagrange a donné, le premier, la résolution des équations

$$x^4 - 2y^4 = \pm z^2 \quad \text{et} \quad x^4 + 8y^4 = z^2;$$

la résolution générale des équations qui précèdent, avec la discussion approfondie de chacun des cas particuliers, a été publiée, en 1873, dans mes *Recherches sur l'Analyse indéterminée*, à Moulins-sur-Allier.

Plus généralement, on démontre, de même, que d'une première solution (x, y, z) de l'équation

$$(9) \quad x^4 - 2(a + 2f^2)x^2y^2 + (a^2 + b^2)y^4 = z^2,$$

on déduit deux autres solutions par les formules

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = 4f^4 + 4af^2 - b^2, \\ m = bxyz \pm f[x^4 - (a^2 + b^2)y^4], \\ n = z^2 + 4f^2x^2y^2, \\ X = 16amnxyz(4m^2x^2y^2 - n^2z^2) \\ \quad + b[16m^2x^2y^2z^2 - (4m^2x^2y^2 - n^2z^2)^2], \\ Y = 2(4m^2x^2y^2 - n^2z^2) \frac{\Delta n^2x^2y^2 + m^2z^2}{f}, \\ Z = \Delta(4m^2x^2y^2 - n^2z^2)^4 - 4\left(\frac{\Delta n^2x^2y^2 + m^2z^2}{f}\right)^4. \end{array} \right.$$

Dans un grand nombre de cas, ces formules résolvent complètement l'équation (9); c'est le cas de l'équation

$$x^4 - 4x^2y^2 + y^4 = z^2,$$

à laquelle on est conduit par les énoncés suivants :

PROBLÈME I. — *Trouver trois carrés inégaux tels que la somme de deux quelconques d'entre eux, diminuée du troisième, soit un carré parfait.*

PROBLÈME II. — *Trouver un triangle rectangle, en*

nombres entiers, tel que le carré de l'hypoténuse augmenté du double de l'aire du triangle soit un carré parfait.

PROBLÈME III. — *Trouver, en nombres entiers, deux triangles ayant deux côtés égaux chacun à chacun, et dans lesquels l'angle compris est égal à 90 degrés pour le premier triangle et à 60 ou 120 degrés pour le second.*

La dernière équation, dont les plus petites solutions sont

$$\begin{aligned} x_0 &= 2, & y_0 &= 1, & z_0 &= 1, \\ x_1 &= 15, & y_1 &= 4, & z_1 &= 191, \\ x_2 &= 161, & y_2 &= 442, & z_2 &= 364807, \\ &\dots\dots, & \dots\dots, & \dots\dots, \end{aligned}$$

avait été traitée incomplètement par Legendre (*Théorie des nombres*, t. II, p. 126 et 127).