

PTASZYCKI

Sur un problème de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 18
(1879), p. 279-281

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__279_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. PTASZYCKI,

à l'Université de Saint-Petersbourg.

Le système de trois points matériels, dont les masses sont égales à l'unité, se meut dans le plan des coordonnées rectangulaires, de sorte que, pendant tout le temps du mouvement du système, son centre de gravité reste à l'origine des coordonnées; ses moments d'inertie par rapport aux axes $x'x$ et $y'y$ sont des quantités constantes égales à a et b et ses axes principaux d'inertie coïncident avec les axes des coordonnées. Alors :

I. *Les points du système se meuvent sur une ellipse, dont l'équation est*

$$\frac{x^2}{\frac{2a}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2b}{3}} = 1.$$

II. *L'aire du triangle, dont les sommets sont les trois points du système, dans toutes ses positions, est une quantité constante égale à $\frac{\sqrt{3ab}}{2}$.*

1. Pendant tout le temps du mouvement, les coordonnées des trois points du système doivent satisfaire aux cinq équations suivantes :

$$(1) \quad x + x_1 + x_2 = 0,$$

$$(2) \quad y + y_1 + y_2 = 0,$$

$$(3) \quad x^2 + x_1^2 + x_2^2 = a,$$

$$(4) \quad y^2 + y_1^2 + y_2^2 = b,$$

$$(5) \quad xy + x_1y_1 + x_2y_2 = 0.$$

Cela posé, de l'identité

$$(x^2 + x_1^2 + x_2^2)(y^2 + y_1^2 + y_2^2) - (xy + x_1y_1 + x_2y_2)^2 \\ = (xy_1 - x_1y)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_2y - xy_2)^2,$$

en remarquant que, en vertu des équations (1) et (2),

$$xy_1 - x_1y = x_1y_2 - x_2y_1 = x_2y - xy_2,$$

et ayant égard aux équations (3), (4) et (5), on tire

$$ab = 3(xy_2 - x_2y_1)^2.$$

Mais

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2,$$

ou, d'après les équations (3), (4) et (5),

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (a - x^2)(b - y^2) - x^2y^2;$$

donc

$$ab = (a - x^2)(b - y^2) - x^2y^2,$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} = 1.$$

2. L'aire P du triangle, dont les sommets sont (x, y) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , est égale à

$$P = \pm \frac{1}{2} [xy_1 + x_1y_2 + x_2y - (xy_2 + x_1y + x_2y_1)];$$

mais, à l'aide des équations

$$(x + x_1 + x_2)(y + y_1 + y_2) = 0, \quad xy + x_1y_1 + x_2y_2 = 0,$$

on conclut que

$$xy_1 + x_1y_2 + x_2y = -(xy_2 + x_1y + x_2y_1);$$

donc

$$(6) \quad P^2 = (xy_1 + x_1y_2 + x_2y)^2 = (xy_2 + x_1y + x_2y_1)^2.$$

Or, de l'identité

$$\begin{aligned} (x^2 + x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2 + y^2) - (xy_1 + x_1y_2 + x_2y)^2 \\ = (xy_2 - x_1y_1)^2 + (x_1y - x_2y_2)^2 + (x_2y_1 - xy)^2, \end{aligned}$$

comme, à cause des équations (1) et (2),

$$xy_2 - x_1y_1 = x_1y - x_2y_2 = x_2y_1 - xy,$$

on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} (x^2 + x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2 + y^2) - (xy_1 + x_1y_2 + x_2y)^2 \\ = (xy_2 - x_1y_1)(x_1y - x_2y_2) + (xy_2 - x_1y_1)(x_2y_1 - xy) \\ + (x_1y - x_2y_2)(x_2y_1 - xy); \end{aligned}$$

en l'ajoutant, après l'avoir multipliée par 2, à l'identité précédente, on obtient l'expression

$$\begin{aligned} 3(x^2 + x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2 + y^2) - 3(xy_1 + x_1y_2 + x_2y)^2 \\ = [xy_2 + x_1y + x_2y_1 - (xy + x_1y_1 + x_2y_2)]^2, \end{aligned}$$

qui donne immédiatement, en ayant égard aux équations (3), (4), (5) et (6),

$$3ab - 3P^2 = P^2;$$

et par conséquent

$$P = \frac{\sqrt{3ab}}{2}.$$