

E. BOUGLÉ

**Question proposée au concours
général de 1877, pour la classe de
mathématiques spéciales**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 18
(1879), p. 13-19

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__13_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877

POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

SOLUTION DE M. E. BOUGLÉ,

Élève du collège Rollin (*).

Rechercher les surfaces S du second degré sur lesquelles il existe une droite D , telle que l'hyperboloïde de révolution H , qui a pour axe une génératrice rectiligne quelconque G , de la surface S , et du même système que D , et qui passe par la droite D , coupe orthogonalement la surface S en tous les points de cette droite.

Si l'on considère tous les hyperboloïdes H qui se rapportent à une même surface S jouissant de la propriété énoncée :

1° Trouver le lieu des sommets A et celui des foyers F

(*) M. E. Bouglé a obtenu le prix d'honneur.

déterminé par la droite D ; la normale à un hyperboloïde H doit être perpendiculaire à D et rencontrer l'axe G : donc ce n'est autre que mS , puisque G et mS sont des génératrices de système différent de S et par suite se rencontrent. Le plan tangent à S passe donc par la normale à H : ces deux plans tangents sont donc perpendiculaires.

Cela posé, le second plan directeur du paraboloidé, étant parallèle à D perpendiculaire à Δ , est aussi perpendiculaire à ce plan. Les deux plans directeurs sont donc perpendiculaires.

Enfin considérons le plan tangent au sommet : il coupe la surface suivant deux droites ; chacune d'elles est perpendiculaire au plan directeur qui ne la contient pas : donc on pourra prendre pour la droite D l'une ou l'autre de ces deux droites. Il n'y a pas sur la surface d'autre droite jouissant de la propriété de D , car il y aurait sur le paraboloidé deux génératrices perpendiculaires à un plan directeur et par suite parallèles.

1° Prenons pour axe des x l'axe du paraboloidé, et pour axes des y et des z les génératrices du sommet.

La droite D sera alors Oz par exemple.

L'équation de S

$$yz = px,$$

et les équations de G

$$y = p\lambda, \quad z = \frac{x}{\lambda}.$$

Cherchons l'équation de la surface engendrée par l'axe des z tournant autour de G , on trouve facilement

$$(H) \quad p^2 \lambda^2 + (\lambda x + z)^2 = x^2 + (\lambda - p\lambda)^2 + z^2.$$

Remarquons que la perpendiculaire commune à (G) et à (D) est précisément Oy ; par suite, le centre de l'hyperboloïde H est C et le rayon du cercle de gorge OC .

Cherchons les points de rencontre de l'axe avec l'hyperboloïde : on trouve

$$z^2 = -\frac{p^2}{\lambda^2 + 1};$$

les valeurs de z sont donc imaginaires; mais, si l'on prend les valeurs réelles

$$z^2 = \frac{p^2}{\lambda^2 + 1},$$

on aura justement les z des sommets réels A de l'hyperboloïde H' conjugué de H.

Si donc on élimine λ entre cette équation et les équations de G, on aura le lieu: ce lieu sera défini par l'intersection du paraboloides avec une autre surface; pour l'avoir, on tire $\lambda = \frac{x}{z}$ et, en portant dans la dernière équation, il vient

$$z^2 = \frac{p^2 z^2}{x^2 + z^2} \quad \text{ou} \quad x^2 + z^2 = p^2,$$

c'est-à-dire un cylindre de révolution autour de O γ ; on pouvait voir autrement ce résultat, en construisant la longueur des axes de la section méridienne de H dans le plan COG; CO est en grandeur et en position l'axe réel de H: l'asymptote s'obtiendra en menant dans le plan COG une droite CE faisant avec G un angle ACE égal à celui de D, et G et EO seront l'axe imaginaire de H et réel de H'; or on a

$$EO = CO \operatorname{tang} ECO,$$

et, en nous reportant aux équations de G,

$$CO = p\lambda, \quad \operatorname{tang} ECO = \frac{z}{x} = \frac{1}{\lambda};$$

donc

$$EO = p\lambda \frac{1}{\lambda} = p,$$

c'est-à-dire que la distance du point **A** à l'axe Oy est constante.

Cherchons les foyers **F**. On a, par définition,

$$\overline{CF}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{AO}^2$$

ou, en appelant x, y, z les coordonnées de **F**,

$$x^2 + y^2 = p^2 + p^2 \lambda^2;$$

mais des équations de **G** on tire

$$n = \lambda z :$$

donc

$$z^2 (1 + \lambda^2) = p^2 (1 + \lambda^2)$$

ou

$$z^2 = p^2;$$

donc les foyers sont sur les génératrices d'intersection du paraboloïde avec deux plans parallèles au plan directeur et menés à la distance p .

2° Menons par le point **F** un plan parallèle à la plus courte distance entre Oz et **G**, c'est-à-dire à Oy . Son équation sera celle de sa trace sur zOx , ou une droite passant par la projection f de **F** et symétrique de la direction de la projection de **G**, $x = \lambda z$. Les coordonnées de f sont

$$x = p\lambda, \quad z = p.$$

On a donc, pour équation du plan **P**,

$$(x - p\lambda) + \lambda(z - p) = 0.$$

Cherchons son intersection avec Oz , on trouve

$$z = 2p,$$

ce qu'on pouvait voir directement ; en effet, coupons la figure par un plan mené par **G** perpendiculairement à Oy : il coupe **P** suivant la droite **BFI** symétrique de **CF**

par rapport à FQ ; donc

$$QI = CQ \quad \text{et} \quad BC = 2FQ = 2p;$$

donc $O\sigma = 2p$.

Le point σ est donc fixe sur Oz ; par suite, la droite qui passe par le point de rencontre de P avec D engendrera un cône, ayant pour sommet σ . Pour trouver ce cône, nous définirons la droite mobile comme l'intersection du plan P avec un cône ayant pour sommet σ et pour base la courbe d'intersection de H avec S.

Pour former l'équation de ce cône, transportons les axes au point σ . L'équation de la surface S est

$$(S) \quad y(z + 2p) = px$$

et celle de H

$$(H) \quad x^2(\lambda^2 - 1) - y^2 + 2\lambda xz + 2p\lambda(2x + y) = 0.$$

De S on tire

$$p = \frac{yz}{x - 2y}$$

et, en substituant dans l'équation,

$$x^2(\lambda^2 - 1) - y^2 + 2\lambda xz + \frac{2\lambda yz}{x - 2y}(2x + y) = 0,$$

équation homogène et du troisième degré, qui représente le cône auxiliaire.

Enfin, en éliminant λ entre cette équation et celle de P

$$x + \lambda z = 0$$

il vient, pour l'équation du lieu,

$$x^4(x - 2y) - x^2(3x - 2y)(x^2 + y^2) = 0,$$

ce qui représente un cône du cinquième degré. Construi-

sons sa trace sur le plan des xy ; en posant $z^2 = 4p^2$, on a une courbe ayant pour centre l'origine, qu'on construit en posant $y = tx$.

Note. — MM. Levy et Hioux, professeur au lycée de Rennes, nous ont adressé une double solution analytique et géométrique; M. Gambey a envoyé une solution purement analytique.