

E. CATALAN

Sur les questions 1248 et 1249

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 252-258

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__252_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES QUESTIONS 1248 ET 1249;

PAR M. E. CATALAN.

J'ai lu, avec un vif intérêt, les deux Notes de M. le capitaine Moreau (*). Elles m'ont semblé susceptibles de certains *compléments*, que je sou mets à l'appréciation de l'honorable auteur.

(*) *Nouvelles Annales*, mars 1878.

I. M. Moreau considère les séries

$$(1) \quad S = (1 + q) \sum_0^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n+1}}, \quad s = (1 - q) \sum_0^{\infty} \frac{(-q)^n}{1 - q^{2n+1}},$$

q désignant la plus petite racine de l'équation

$$(2) \quad x^2 - ax + 1 = 0 \quad (a > 2) (*).$$

Posant

$$(3) \quad \frac{1}{1+q} + \frac{q}{1+q^3} + \frac{q^2}{1+q^5} + \dots = f(q),$$

$$(4) \quad \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q^3} + \frac{q^2}{1-q^5} - \dots = \varphi(q),$$

M. Moreau prouve que

$$f(q) = \varphi(q).$$

En conséquence,

$$(5) \quad \frac{S}{s} = \frac{1+q}{1-q}.$$

Or les séries (3), (4) sont connues : si l'on fait, avec Jacobi,

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad \omega' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}},$$

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad q = e^{-\pi \frac{\omega}{\omega'}},$$

on a

$$f(q) = \varphi(q) = \frac{k\omega}{2\pi\sqrt{q}} (**).$$

Ainsi

$$(6) \quad S = \frac{1+q}{\sqrt{q}} \frac{k\omega}{2\pi}, \quad s = \frac{1-q}{\sqrt{q}} \frac{k\omega}{2\pi}.$$

(*) On verra tout à l'heure pourquoi nous avons modifié les notations employées par M. Moreau.

(**) *Fundamenta nova*..., p. 103.

II. On a aussi

$$(7) \quad \frac{k\omega}{2\pi} = \sum_0^{\infty} \varepsilon_{4n+1} q^{n+\frac{1}{2}} (*).$$

Dans cette formule, ε_{4n+1} est l'excès du nombre des diviseurs de $4n+1$, ayant la forme $4\mu+1$, sur le nombre de ceux qui ont la forme $4\mu-1$ (**). Conséquemment, les formules (6) équivalent à celles-ci :

$$(8) \quad S = (1+q) \sum_0^{\infty} \varepsilon_{4n+1} q^{2n}, \quad s = (1-q) \sum_0^{\infty} \varepsilon_{4n+1} q^{2n}.$$

La question 1248, proposée par M. Édouard Lucas, suppose $a = 3$.

Il résulte, de cette valeur,

$$q = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots, \quad s = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{29} + \dots$$

Ainsi ces deux séries, à termes fort simples, ont mêmes limites que les séries (8), ordonnées suivant les puissances du nombre $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

III. D'après la relation

$$D_{n+2} - a D_{n+1} + D_n = 0,$$

si les deux premiers dénominateurs sont entiers, tous le seront (***). Or

$$D_0 = 1, \quad D_1 = \frac{1+q^3}{q+1+q} = \frac{q^2-q+1}{q} = a-1 = \text{entier}.$$

(*) *Fundamenta*, p. 105. — *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 115.

(**) *Recherches...*, p. 75.

(***) Nous supposons a entier.

Ainsi, l'énoncé de la question 1248 peut être modifié d'une infinité de manières (*).

Exemples. — 1° $a = 4$, $D_1 = 3$, $q = 2 - \sqrt{3}$:

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{41} + \frac{1}{153} + \dots,$$

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{19} - \frac{1}{71} + \frac{1}{265} - \dots \quad (**);$$

$$\frac{S}{s} = \sqrt{3}.$$

2° $a = 6$, $D_1 = 5$, $d_1 = 7$, $q = 3 - \sqrt{8}$:

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{169} + \frac{1}{985} + \dots,$$

$$s = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{41} - \frac{1}{239} + \frac{1}{1393} - \dots;$$

$$\frac{S}{s} = \sqrt{2}.$$

IV. Dans son élégante solution de la question 1249, M. le capitaine Moreau fait observer que :

1° *On satisfait à l'équation*

$$y_n = y_{n-1}^2 - 2,$$

en prenant

$$y_n = x^{(2n)} + x^{-(2n)},$$

si

$$x^2 - 3_0 x + 1 = 0;$$

(*) Remarque déjà faite par le capitaine Moreau.

(**) En général, le dénominateur du deuxième terme de s est, en valeur absolue,

$$d_1 = \frac{1 - q^3}{q(1 - q)} = n + 1$$

$$2^o \quad \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 x_1} + \frac{1}{x_0 x_1 x_2} + \dots = \frac{x_0 - \sqrt{x_0^2 - 4}}{2}.$$

De là résultent, par exemple, les sommations suivantes, assez remarquables :

$$\begin{aligned} \sqrt{24} &= 5 - \frac{1}{10} - \frac{1}{10.98} - \frac{1}{10.98.9602} - \dots, \\ \frac{1}{4} &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5.17} + \frac{4.16}{5.17.259} + \frac{4.16.256}{5.17.257.655.537} + \dots \end{aligned}$$

V. Comme l'a remarqué M. Gerono (*), l'énoncé de la question 1181 n'est pas complet. D'autre part, la démonstration publiée dans les *Nouvelles Annales* (**) est un peu longue. On peut, comme il suit, trouver rapidement la formule exacte, et même une formule un peu plus générale.

On a, *identiquement*,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a-1}{a} + \frac{1}{a}, \\ 1 &= \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{ab} + \frac{1}{ab}, \\ 1 &= \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{ab} + \frac{c-1}{abc} + \frac{1}{abc}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Par conséquent : 1° Si les produits $ab, abc, abcd, \dots$ croissent au delà de toute limite,

$$\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{ab} + \frac{c-1}{abc} + \dots = 1;$$

(*) *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 181.

(**) T. XV, p. 135.

2° Si ces produits tendent vers une limite λ ,

$$(A) \quad \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{ab} + \frac{c-1}{abc} + \dots = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

On trouve, de la même manière,

$$(B) \quad \frac{a-\alpha}{a} + \frac{b\alpha-\beta}{ab} + \frac{c\beta-\gamma}{abc} + \dots = 1 - \lim \frac{\theta}{abc \dots t}.$$

VI. Pour appliquer la formule (A), prenons

$$a = 1 + q, \quad b = 1 + q^2, \quad c = 1 + q^3, \quad d = 1 + q^4, \dots$$

De là résulte

$$\lambda = \lim (1 + q) (1 + q^2) (1 + q^3) (1 + q^4) \dots;$$

ou, avec les notations de Legendre (*),

$$\lambda = \beta\beta' = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2^{\frac{1}{6}} k^{-\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{q}{1+q} + \frac{q^2}{(1+q)(1+q^2)} + \frac{q^3}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)} + \dots \\ &= 1 - 2^{\frac{1}{6}} k^{-\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}}. \end{aligned}$$

Le second membre peut être écrit autrement. On sait (**) que

$$\alpha = \sum_0^\infty \varphi_i(n) (-q)^n = 1 - \sum_1^\infty \varphi_i(n) (-1)^{n-1} q^n,$$

$\varphi_i(n)$ représentant le nombre des décompositions de

(*) *Recherches sur quelques produits...* (p. 1 et 2).

(**) *Recherches...*, p. 4.

n , en parties impaires, inégales; par conséquent,

$$\begin{aligned} & \frac{q}{1+q} + \frac{q^2}{(1+q)(1+q^2)} + \frac{q^3}{(1+q)(1+q^2)(1+q^4)} + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(i(n)) (-1)^{i-1} q^n. \end{aligned}$$

Il est clair que l'on pourrait indéfiniment multiplier ces applications.

P. S. En lisant l'énoncé de la *question 1181*, il m'avait semblé avoir déjà vu le théorème qu'il exprime. En effet, ce théorème est compris dans une transformation générale, due à Stern, et publiée dans les *Nouvelles Annales* (1^{re} série, t. VI, p. 438).