

S. RÉALIS

Questions 833 et 748

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 190-191

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__190_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Questions 833 et 748

(voir 2^e série, t. VI, p. 480 et 508, et t. IV, p. 431);

PAR M. S. REALIS.

Si les nombres entiers a, b, c sont racines de l'équation

$$x^3 - px + q = 0,$$

on aura

$$p^2 + 3\gamma' a^2 = r'^2,$$

$$p^2 + 3\gamma'' b^2 = r''^2,$$

$$p^2 + 3\gamma''' c^2 = r'''^2,$$

$\gamma', \gamma'', \gamma'''$ et r', r'', r''' étant racines entières de deux équations cubiques homogènes que l'on peut construire, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières de p et q . Le produit $r' r'' r'''$, pris positivement, sera un carré.

(S. RÉALIS.)

Posant

$$y' = 3a^2 - 2p,$$

$$y'' = 3b^2 - 2p,$$

$$y''' = 3c^2 - 2p,$$

y', y'', y''' seront racines de l'équation

$$y^3 - 3p^2y + 2p^3 - 27q^2 = 0,$$

et l'on aura, en observant que $a + b + c = 0$,

$$p^2 + 3y' a^2 = (a - b)^2 (a - c)^2 = r'^2,$$

$$p^2 + 3y'' b^2 = (b - c)^2 (b - a)^2 = r''^2,$$

$$p^2 + 3y''' c^2 = (c - a)^2 (c - b)^2 = r'''^2.$$

Ces formules font voir que

$$r' r'' r''' = [(a - b)(b - c)(c - a)]^2,$$

et permettent de construire l'équation ayant r', r'', r''' pour racines, savoir

$$r^3 - 3pr^2 + 4p^3 - 27q^2 = 0.$$

Si a, b, c sont entiers, les y et les r sont aussi nécessairement entiers.

De là l'énoncé de la question.

Ajoutons que l'on déduit de ce qui précède

$$r' + r'' + r''' = 3p,$$

$$r'^2 + r''^2 + r'''^2 = (3p)^2.$$

Ces formules, où p peut représenter tout nombre de la forme $3u^2 + v^2$, et où les valeurs numériques des entiers r', r'', r''' donnent un produit égal à un carré, ces formules, dis-je, expriment une propriété du nombre $3p$ qui nous paraît digne d'être signalée.

Note. — La solution de la question 833 entraîne celle de la question analogue 748 (voir 2^e série, t. IV, p. 431).