

H. COURBE

Question de licence (novembre 1875)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 113-115

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__113_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION DE LICENCE (NOVEMBRE 1875);

PAR M. H. COURBE,

Professeur au lycée de Fribourg (Suisse).

Déterminer toutes les surfaces qui satisfont à la condition

$$OP.MN = \lambda \overline{OM}^2,$$

dans laquelle λ désigne une constante donnée, O l'origine des coordonnées, M un point quelconque de l'une des surfaces, P le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan tangent en M, et N la trace de la normale sur le plan des xy .

Soient x, y, z les coordonnées du point M; X, Y, Z les coordonnées courantes; l'équation du plan tangent en M sera

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

(114)

en posant, pour simplifier,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q.$$

La normale au point M a pour équations

$$(X - x) + p(Z - z) = 0,$$

$$(Y - y) + q(Z - z) = 0.$$

La distance OP de l'origine au plan tangent a pour expression

$$OP = \frac{z - px - qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.$$

La trace N de la normale sur le plan des xy ayant pour coordonnées

$$Z = 0, \quad X = x + pz, \quad Y = y + qz,$$

la longueur MN a pour expression

$$MN = z \sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

Enfin, comme on a

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

l'équation de condition peut s'écrire

$$z(z - px - qy) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2),$$

ou

$$z - \frac{dz}{dx}x - \frac{dz}{dy}y = \lambda \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z};$$

telle est l'équation différentielle des surfaces cherchées.

On a donc à intégrer les équations simultanées

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z dz}{z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

La première donne

$$\frac{y}{x} = C.$$

La seconde peut alors s'écrire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - \lambda[(1 + C^2)x^2 + z^2]}{zx}.$$

En désignant par t une variable auxiliaire, et en posant

$$z = tx, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dx} = x \frac{dt}{dx} + t,$$

elle devient

$$x \frac{dt}{dx} = - \frac{\lambda(1 + C^2 + t^2)}{1} \quad \text{ou} \quad - \lambda \frac{dx}{x} = \frac{t dt}{1 + C^2 + t^2},$$

et, en intégrant,

$$\log(1 + C^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} + \log x^\lambda = \text{const.}$$

Remplaçons t par $\frac{z}{x}$, C par $\frac{y}{x}$, et passons aux fonctions inverses, nous aurons

$$x^{\lambda-1}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = C'.$$

En faisant $C' = \varphi(C)$, φ désignant une fonction arbitraire, on a, pour représenter toutes les surfaces cherchées, l'équation

$$x^{\lambda-1}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$