

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 523-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__523_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1210

(voir 2^e série, t. XV, p. 240);

PAR M. CH. BRUNOT,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

Trouver l'enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe donnée et qui demeure

tangente à un système de trois diamètres conjugués d'une surface à centre du second degré également donnée.
(V. HIOUX.)

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$$

les équations de la sphère et de l'ellipsoïde donnés;
soit

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + (Z - \gamma)^2 = \rho^2$$

l'équation de la sphère variable; soient enfin

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'},$$

$$\frac{x}{x''} = \frac{y}{y''} = \frac{z}{z''},$$

$$\frac{x}{x'''} = \frac{y}{y'''} = \frac{z}{z'''}$$

les équations de trois diamètres quelconques.

Si l'on pose

$$\frac{x'}{a} = \cos \lambda', \quad \frac{y'}{b} = \cos \mu', \quad \frac{z'}{c} = \cos \nu',$$

$$\frac{x''}{a} = \cos \lambda'', \quad \frac{y''}{b} = \cos \mu'', \quad \frac{z''}{c} = \cos \nu'',$$

$$\frac{x'''}{a} = \cos \lambda''', \quad \frac{y'''}{b} = \cos \mu''', \quad \frac{z'''}{c} = \cos \nu''',$$

la condition pour que le premier diamètre soit tangent à la sphère mobile est

$$(\alpha x' + \beta y' + \gamma z')^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

ou

$$(a \alpha \cos \lambda' + b \beta \cos \mu' + c \gamma \cos \nu')^2$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2)(a^2 \cos^2 \lambda' + b^2 \cos^2 \mu' + c^2 \cos^2 \nu').$$

Faisons la somme de cette équation et des deux autres analogues, et observons que, lorsque trois diamètres sont conjugués, les trois directions (λ', μ', ν') , $(\lambda'', \mu'', \nu'')$, $(\lambda''', \mu''', \nu''')$ sont rectangulaires; il vient

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Éliminant ensuite ρ^2 entre cette équation et la suivante :

$$(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 + (\gamma - z_1)^2 = R^2 + \rho^2,$$

qui exprime que les deux sphères se coupent orthogonalement, on en conclut que le centre de la sphère mobile décrit une surface du second ordre. L'enveloppe cherchée est donc une surface anallagmatique du quatrième ordre, conformément à la définition donnée par M. Moutard.

Question 1242

(voir 2^e série, t. XVI, p. 288);

P A R M. F. P I S A N I,

Professeur à Girgenti.

On donne, dans un plan, un triangle, une conique circonscrite et une droite quelconque. On prend le milieu (toujours réel) de la droite considérée comme corde de la conique, et les symétriques, par rapport à ce milieu, des trois points où la droite rencontre les côtés du triangle. Démontrer que les trois droites obtenues en joignant ces symétriques aux sommets opposés du triangle vont concourir sur la conique.

(J.-J.-A. MATHIEU.)

Soient ABC un triangle inscrit dans une conique; P, Q, R les points d'intersection de la transversale u avec les côtés BC, CA, AB; M, M' les points d'intersection de la même droite avec la courbe; O le milieu de la corde MM'.

Prenons $OP' = OP$, la droite AP' rencontre la courbe au point A' . Menons les droites $A'B$, $A'C$ qui vont couper la transversale aux points Q' , R' .

$ABCA'$ étant un quadrilatère inscrit dans une conique, la transversale u coupe les couples de côtés opposés et la courbe en couples de points en involution

$$(P, P'), (Q, Q'), (R, R'), (M, M');$$

mais le point O est le milieu des deux segments PP' , MM' déterminés par deux couples de points conjugués; donc O sera de même le milieu des autres segments QQ' , RR' , c'est-à-dire que les points P' , Q' , R' sont symétriques des points P , Q , R par rapport au point O , milieu de la corde MM' . Donc AP' , BQ' , CR' sont trois droites concourant au point A' situé sur la conique.

On peut aisément démontrer le théorème corrélatif:

On donne, dans un plan, un triangle, une conique inscrite et un point quelconque. On prend la bissectrice (toujours réelle) de l'angle des tangentes issues de ce point, et, par rapport à cette bissectrice, les droites symétriques des trois rayons qui projettent les trois sommets du triangle : ces trois droites rencontrent les côtés opposés du triangle en trois points situés sur une même tangente à la conique.

Soient abc un triangle circonscrit à une conique; p, q, r les rayons qui joignent le point U aux sommets (bc) , (ca) , (ab) ; m, m' les tangentes issues de U à la courbe; o la bissectrice de l'angle des tangentes m, m' .

Faisons l'angle $oUp' = oUp$, et, par le point (ap') , menons la tangente a' . Projetons enfin du point U les points $(a'q)$, $(a'r)$ par les droites q', r' .

$abca'$ étant un quadrilatère circonscrit à la conique,

les couples de droites menées de U aux sommets et les deux tangentes forment un faisceau en involution

$$pp', qq', rr', mm';$$

mais la droite o est la bissectrice des deux angles pUp' , mUm' , déterminés par deux couples de rayons conjugués : donc o sera de même bissectrice des angles qUq' , rUr' , c'est-à-dire que les rayons p', q', r' sont symétriques par rapport à la droite o qui est la bissectrice de l'angle des tangentes m, m' . Donc les points d'intersection de p', q', r' , avec les côtés a, b, c du triangle abc , sont situés sur une même tangente à la courbe.

Note. — Solutions analogues par MM. A. Bertrand, propriétaire à Azillanet (Hérault); Moret-Blanc; L. Bertaux, élève de l'Athénée de Mons. Solutions analytiques, par MM. H. Lez; A. Venard, élève du lycée de Clermont-Ferrand; V. Jamet, professeur au lycée de Saint-Brieuc; Numa Para, élève du lycée de Bordeaux.

Question 1244

(voir 2^e série, t. XVI, p. 335);

PAR M. J. LAPIERRE,

Élève du lycée de Bordeaux.

Soient m, n, p les bissectrices des angles d'un triangle, opposés aux côtés a, b, c ; démontrer que

$$\begin{aligned} & c \left(np \cos \frac{A}{2} + mp \cos \frac{B}{2} - mn \cos \frac{C}{2} \right) \\ &= b \left(np \cos \frac{A}{2} + mn \cos \frac{C}{2} - mp \cos \frac{B}{2} \right) \\ &= a \left(mp \cos \frac{B}{2} + mn \cos \frac{C}{2} - np \cos \frac{A}{2} \right) = mnp. \end{aligned}$$

(LEZ.)

On a

$$m = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}, \quad n = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{B}{2}, \quad p = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{C}{2}.$$

Si, entre ces trois équations, j'élimine a , b , j'aurai une relation entre m , n , p et les angles du triangle, qui, simplifiée, donnera l'expression cherchée.

Des deux premières équations je tire

$$b = \frac{mc}{2c \cos \frac{A}{2} - m}, \quad a = \frac{nc}{2c \cos \frac{B}{2} - m},$$

d'où

$$ab = \frac{mnc^2}{\left(2c \cos \frac{A}{2} - m\right) \left(2c \cos \frac{B}{2} - m\right)},$$

$$a + b = \frac{mc \left(2c \cos \frac{B}{2} - m\right) + nc \left(2c \cos \frac{A}{2} - m\right)}{\left(2c \cos \frac{A}{2} - m\right) \left(2c \cos \frac{B}{2} - m\right)}.$$

Je porte ces valeurs dans la troisième équation: il vient

$$mp \left(2c \cos \frac{B}{2} - m\right) + np \left(2c \cos \frac{A}{2} - m\right) = 2mnc \cos \frac{C}{2};$$

d'où la relation demandée

$$c \left(np \cos \frac{A}{2} + mp \cos \frac{B}{2} - mn \cos \frac{C}{2} \right) = mnp.$$

En éliminant de même a et c , on aura la deuxième relation; de même pour la troisième.

Note. — Solutions analogues par MM. J. Chambon, élève du lycée de Bordeaux; Moret-Blanc; Ferd. Pisani; A. Genouille, professeur au lycée de Tournon; P. Sondat.
