

MORET-BLANC

**Questions proposées au concours
d'admissibilité à l'École polytechnique
(1876)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 264-266

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__264_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS PROPOSÉES
AU CONCOURS D'ADMISSIBILITÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(1876).

SOLUTIONS DE M. MORET-BLANC.

PREMIÈRE QUESTION. — *Expliquer la recherche du lieu des milieux des cordes parallèles à la droite qui joint l'origine au point dont les coordonnées sont $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$, pour la surface représentée par l'équation*

$$(1) \quad x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy + 5x + z = 0.$$

Nota. — L'explication doit être faite sur les données numériques qui ont été indiquées et non avec des relations générales littérales.

SOLUTION.

Les équations de la droite joignant l'origine au point $(x = 2, y = -1, z = 1)$ sont

$$(a) \quad \begin{cases} x = 2z, \\ y = -z, \end{cases}$$

et celles d'une corde parallèle à cette droite sont

$$(2) \quad \begin{cases} x = 2z + \alpha, \\ y = -z + \beta, \end{cases}$$

α et β étant des paramètres variables d'une corde à l'autre.

Les équations (1) et (2) déterminent les coordonnées des points d'intersection de la corde et de la surface.

En reportant dans l'équation (1) les valeurs de x et y

données par l'équation (2), on obtient l'équation

$$z^2 - (2\alpha + 11)z + \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 + 5\alpha = 0.$$

La coordonnée z du milieu de la corde est la demi-somme des racines de cette équation. On a donc

$$z = \alpha + 5,5,$$

puis

$$x = 3\alpha + 11,$$

$$y = \beta - \alpha - 5,5.$$

Telles sont les coordonnées du milieu de la corde définie par les valeurs α et β . Si donc on élimine α et β entre ces trois équations, ou simplement α entre les deux premières qui ne contiennent pas β , on aura la relation qui doit exister entre les coordonnées d'un point pour qu'il soit le milieu d'une corde parallèle à la droite donnée (a), c'est-à-dire l'équation du lieu des milieux de ces cordes, ce qui donne

$$x - 3z + 5,5 = 0,$$

équation du plan diamétral des cordes parallèles à la direction donnée.

DEUXIÈME QUESTION. — *On demande de trouver les limites entre lesquelles doit varier le coefficient a pour que l'équation*

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$$

ait ses quatre racines réelles.

On sait (théorème de Rolle) qu'entre deux racines réelles de l'équation proposée est comprise, au moins, une racine réelle de l'équation dérivée

$$12x^3 - 12x^2 - 24x = 0,$$

ou

$$x(x^2 - x - 2) = 0.$$

Les racines de celle-ci sont, par ordre de grandeur,

$$-1, 0, 2.$$

Il faut qu'en substituant à x , dans l'équation proposée, $-\infty$, -1 , 0 , 2 , $+\infty$, on ait des résultats alternativement positifs et négatifs

Nombres substitués.	Résultats.
$-\infty$	$+\infty$
-1	$a - 5$
0	$+a$
2	$a - 32$
$+\infty$	$+\infty$

a doit donc être compris entre zéro et 5, les limites étant admissibles. Si $a = 0$, l'équation a deux racines nulles; si $a = 5$, deux racines sont égales à -1 .

Nota. — Les quatre racines étant réelles, la plus petite est comprise entre -2 et -1 , et la plus grande entre 2 et 3 .