

MORET-BLANC

**Question proposée au concours d'admission
à l'École centrale. 2e session. Octobre 1876**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 224-226

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__224_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION PROPOSÉE
AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE.

2^e SESSION. — OCTOBRE 1876.

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

On donne dans un plan un angle ROR' , un point A sur la bissectrice Ox de cet angle, et deux points B, B' placés symétriquement par rapport à Ox .

On mène par le point A une droite quelconque qui rencontre OR en C et OR' en C' ; on mène les droites $BC, B'C'$, ces droites se coupent en un point M .

On demande le lieu décrit par le point M , quand la droite CAC' tourne autour du point A .

On discutera le lieu en laissant fixes les droites OR, OR' et le point A , et en déplaçant le point B , et, par suite, le point B' .

On indiquera dans quelles régions du plan doit être placé le point B pour que le lieu soit une ellipse, une hyperbole, ou une parabole.

Prenons pour axes la droite Ox et sa perpendiculaire menée par le point O .

Soient $OA = a$, α et β les coordonnées du point B ;

$$y = mx,$$

$$y = -mx$$

les équations des droites OR, OR', et

$$y = m'(x - a)$$

celle d'une droite menée par A ; on en déduit

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{m'a}{m' - m} \\ y_1 &= \frac{mm'a}{m' - m} \end{aligned} \right\} \text{coordonnées du point C ;}$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{m'a}{m' + m} \\ y_2 &= \frac{-mm'a}{m' + m} \end{aligned} \right\} \text{coordonnées du point C' .}$$

La droite BC a pour équation

$$(y_1 - \beta)x + (\alpha - x_1)y + \beta x_1 - \alpha y_1 = 0,$$

ou, en remplaçant x_1, y_1 par leurs valeurs, et mettant m' en facteur.

$$[(ma - \beta)x + (\alpha - a)y + (a\beta - ma\alpha)]m' = (m\alpha y - m\beta x).$$

L'équation de B'C' s'en déduit en changeant β en $-\beta$ et m en $-m$

$$[-(ma - \beta)x + (\alpha - a)y - (a\beta - ma\alpha)]m' = -(m\alpha y + m\beta x).$$

Si l'on élimine m' en multipliant en croix, on obtient l'équation du lieu du point M

$$\beta(ma - \beta)x^2 + \alpha(\alpha - a)y^2 + a\beta(\beta - m\alpha)x = 0.$$

C'est une conique ayant un axe coïncidant avec Ox.

Cette conique sera une ellipse, une hyperbole, ou une parabole, selon que le produit

$$\alpha\beta(ma - \beta)(\alpha - a)$$

sera positif, négatif, ou nul.

Par le point A menons une perpendiculaire à Ox , qui rencontre OR en D, puis par D une parallèle à Ox , qui rencontre Oy en E.

On reconnaît sans peine que le lieu est une ellipse si le point B est dans l'une des bandes extérieures formées par le prolongement de deux côtés opposés du rectangle OEDA; une hyperbole s'il est dans l'intérieur du rectangle ou dans l'un des angles opposés par le sommet à ceux du rectangle; une parabole s'il est sur une des droites Oy , AD, DE indéfiniment prolongées.

Si le point B est placé sur Ox , la condition précédente semble indiquer une parabole; mais, en remontant aux équations des droites BC, $B'C'$ qui, pour $\beta = 0$, deviennent

$$\begin{aligned} [ma(x - a) + (\alpha - a)y]m' &= m\alpha y, \\ [ma(x - a) - (\alpha - a)y]m' &= m\alpha y, \end{aligned}$$

on voit qu'elles sont satisfaites par $x = a$, $y = 0$, quel que soit m' : le lieu se réduit au point B, ce qui est d'ailleurs évident *a priori*.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey; Brunot, élève au lycée de Dijon; Jules Freson et Georges Lambiotte, élèves de l'École des Mines de Liège.

M. Brunot a donné des solutions géométrique et analytique.