

ÉDOUARD LUCAS

Sur les sommes des puissances semblables des nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 18-26

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__18_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Soit, en général, une fonction entière $\Delta f(x)$ égale à la différence d'une fonction $f(x)$, pour une différence de l'argument égale à l'unité

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n;$$

en remplaçant successivement x par 1, 2, 3, ..., $(x-1)$, et en posant

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (x-1)^n,$$

on obtient par addition

$$f(x) - f(1) = a_0 S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \dots + a_n S_0,$$

ou, *symboliquement*,

$$(1) \quad f(x) - f(1) = \Delta f(S),$$

en ayant soin de ne pas oublier l'exposant zéro de S.

Faisons, dans la formule (1), $f(x)$ égal à $(x-1)^n$ ou à x^n , nous obtenons

$$(2) \quad (x-1)^n = S^n - (S-1)^n,$$

$$(3) \quad x^n - 1 = (S+1)^n - S^n,$$

et, par addition et soustraction, les deux formules

$$(4) \quad x^n + (x-1)^n - 1 = (S+1)^n - (S-1)^n,$$

$$(5) \quad x^n - (x-1)^n - 1 = (S+1)^n + (S-1)^n - 2S^n,$$

qui permettent de calculer les sommes S de deux en deux, par voie récurrente. Mais on peut, pour parvenir au même but, se servir de la formule suivante. En effet, faisons encore, dans la formule (1), $f(x)$ égal à $\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$, nous obtenons l'équation

$$(6) \quad (2x-1)^n - 1 = (2S+1)^n - (2S-1)^n,$$

qui a été donnée par M. Gilbert, au moyen de l'analyse infinitésimale (*Nouvelles Annales de Mathématiques*).

Enfin, si, dans la formule (1), on suppose

$$f(x) = (x+z)(x+z+1) \dots (x+z+n-1),$$

on obtient

$$(7) \quad f(x) - f(1) = n(S+z+1)(S+z+2) \dots (S+z+n-1),$$

et plus particulièrement, pour $z=0$ et pour $z=-1$,

$$(8) \quad \begin{cases} x(x+1) \dots (x+n-1) \\ = n(S+1)(S+2) \dots (S+n-1) + 1.2.3 \dots n, \\ (x-1)x \dots (x+n-2) = nS(S+1) \dots (S+n-2). \end{cases}$$

2. On tire du système des n équations obtenues en remplaçant successivement n par 1, 2, 3, ..., n , dans la formule (3), le déterminant

$$9) \quad 1 \ 2 \ 3 \dots n, S_n = \begin{vmatrix} x^n & C_{n-2}^{n-2} & C_{n-3}^{n-3} & \dots & C_n^1 & 1 \\ x^{n-1} & C_{n-1}^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ x^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-1} & \dots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^2 & 0 & 0 & \dots & C_2^1 & 1 \\ x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On obtient un déterminant plus simple au moyen de l'une des formules (4), (5) ou (6). Cette dernière donne, par exemple, pour des valeurs impaires de l'exposant

$$10) \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) 2^{2n+1} S_n = \begin{vmatrix} (2x-1)^{2n+1} & C_{2n+1}^{2n-2} & C_{2n+1}^{2n-4} & \dots & C_{2n+1}^2 & 1 \\ (2x-1)^{2n-1} & C_{2n-1}^{2n-2} & C_{2n-1}^{2n-4} & \dots & C_{2n-1}^2 & 1 \\ (2x-1)^{2n-3} & 0 & C_{2n-3}^{2n-4} & \dots & C_{2n-3}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2x-1)^3 & 0 & 0 & \dots & C_3^2 & 1 \\ (2x-1)^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Enfin on peut obtenir S_n en fonction d'un déterminant contenant au moins $(n+1)$ fonctions arbitraires de x ; pour cela, il suffit de considérer $(n+1)$ équations semblables à l'équation (1).

3. La formule (1) peut être généralisée par l'introduction de nouvelles variables. En effet, on peut écrire cette formule de la manière suivante :

$$\Delta_x f(1, x) = \Delta_x f(S, x),$$

en supposant l'accroissement de x égal à $(x-1)$, et ce-

lui de S à l'unité; on en déduit

$$(11) \quad \Delta_{x,y}^2 f(1,1) = \Delta_{s,s'}^2 f(S, S'),$$

et, de même,

$$(12) \quad \Delta_{x,y,z,\dots}^p f(1,1,1,\dots) = \Delta_{s,s',s'',\dots}^p f(S, S', S'', \dots),$$

p désignant le nombre des variables; les accroissements du premier membre sont respectivement égaux à $(x-1)$, $(y-1)$, $(z-1)$, et ceux du second membre à l'unité. On ne doit pas réduire les S avec les S' et les S''; mais on remplacera, après le développement du second membre, S^n , S'^n , S''^n par S_n , et l'on obtiendra des relations entre les produits deux à deux, trois à trois, etc., des sommes S.

4. On peut poser, symboliquement, l'égalité

$$(13) \quad n S_{n-1} = (x+B)^n - B^n,$$

dans laquelle on remplace les exposants de B par des indices, et B_0 par l'unité. Ces coefficients B sont appelés *nombre de Bernoulli*, parce que Jacques Bernoulli les a remarqués, le premier, comme formant le coefficient du dernier terme, dans les sommes des puissances paires. La comparaison des formules (9) et (13) donne

$$(14) \quad 1.2.3 \dots n. B_{n-1} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} C_{n-2}^{n-2} & C_{n-3}^{n-3} & \dots & C_n^1 & 1 \\ C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ 0 & C_{n-2}^{n-3} & \dots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_2^1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il serait facile de trouver ainsi un grand nombre de formules semblables, mais on peut aussi calculer les coefficients B de la manière suivante. En changeant x

en $x + 1$, dans la relation (13), on obtient, par différence, l'identité

$$(15) \quad n x^{n-1} = (x + B + 1)^n - (x + B)^n,$$

qui a lieu pour toutes les valeurs entières et positives de x et, par suite, quelle que soit la valeur de x . En particulier, pour $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = -\frac{1}{2}$, et, par addition et par soustraction, on a les relations récurrentes

$$(16) \quad \begin{cases} (B + 1)^n - B^n = 0, \\ B^n - (B - 1)^n = n(-1)^{n-1}, \\ (B + 1)^n + (B - 1)^n = n(-1)^{n-1}, \\ (B + 2)^n - (B + 1)^n = n, \\ (2B + 1)^n - (2B - 1)^n = 2n(-1)^{n-1}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

La première de ces relations a été indiquée par Moivre.

On peut encore obtenir les nombres B au moyen de déterminants déduits des équations (15) et (16); le calcul donne, pour les premiers coefficients,

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = -\frac{1}{30}, \\ B_4 = \frac{1}{42}, \quad B_5 = -\frac{1}{30}, \quad \dots$$

Les coefficients d'indice impair sont nuls, à l'exception de B_1 , ainsi que cela résulte de la troisième et de la cinquième des formules (16); d'autre part, l'équation (14) fait voir que le produit $1.2.3 \dots n B_{n-1}$ est entier.

Enfin on déduit encore de la formule (13) l'égalité

$$(17) \quad \frac{dS_n}{dx} = nS_{n-1} + B_n,$$

qui permet de calculer rapidement S_n par voie d'intégra-

tion, en calculant chaque fois la constante par l'une des conditions

$$S_n = 1 \text{ pour } x = 2 \text{ et } S_n = 0 \text{ pour } x = 1.$$

5. Si l'on observe que le premier membre de la formule (15) est la dérivée de x^n , et le second, la différence de $(x + B)^n$, on a, plus généralement,

$$(18) \quad f(x + B + 1) - f(x + B) = f'(x).$$

Posons, par exemple,

$$f(x) = x(x + 1) \dots (x + n - 1),$$

nous obtenons

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{n}{x} &= \frac{B + x + 1}{x + 1} \frac{B + x + 2}{x + 2} \dots \frac{B + x + n - 1}{x + n - 1} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} + \dots + \frac{1}{x + n - 1}. \end{aligned} \right.$$

Dans l'hypothèse $x = 1$, nous avons

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{n}{1} \frac{B + 2}{2} \frac{B + 3}{3} \dots \frac{B + n}{n} \\ = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \end{aligned} \right.$$

et, pour $x = 0$, en augmentant n d'une unité,

$$(21) \quad (B + 1)(B + 2) \dots (B + n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{n + 1}.$$

La formule (18) donne, pour $x = 0$,

$$(22) \quad f(B + 1) - f(B) = f'(0);$$

faisons maintenant $f(x) = e^{xz}$, il vient

$$e^{Bz}(e^z - 1) = z,$$

et, par suite,

$$(23) \quad e^{1z} = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Cette formule, souvent employée en Analyse, subsiste pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à 2π .

Faisons encore, dans la formule (22),

$$f(x) = \sin \left(x - \frac{1}{2} \right) z,$$

nous obtenons

$$(24) \quad \cos Bz = \frac{z}{2} \cot \frac{z}{2}.$$

6. Si l'on introduit une seconde variable γ dans la formule (18), on a

$$\Delta_x f(x + B, \gamma) = \frac{df(x, \gamma)}{dx},$$

en supposant $\Delta x = 1$; si l'on applique ce résultat à la fonction $\frac{df(x, \gamma)}{dx}$ de γ , on aura

$$(25) \quad \Delta_{\gamma} f(x + B, \gamma + B') = \frac{d^2 f(x, \gamma)}{dx d\gamma},$$

et, en général,

$$(26) \quad \Delta_{\gamma}^n f(x + B, \gamma + B' + B'', \dots) = \frac{d^n f(x, \gamma, z, \dots)}{dx d\gamma dz \dots},$$

en supposant $\Delta x = \Delta \gamma = \Delta z = \dots = 1$. On ne réduira pas les B avec les B' et les B'' ; mais, lorsque le développement symbolique du premier membre sera effectué, on remplacera B^n , B'^n , B''^n , ... par B_n . On aura ainsi les relations contenant les produits deux à deux, trois à trois, etc., des nombres de Bernoulli.

7. On a, d'après les résultats obtenus dans un article

précédent (*Nouvelles Annales*, novembre 1875), la formule

$$(27) \quad S_m S_n - S_{m+n} = S^m \frac{(S+B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} + S^n \frac{(S+B)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1};$$

pour $m = n$,

$$(28) \quad \frac{n+1}{2} S_n^2 = S^n (S+B)^{n+1} - S^n B^{n+1},$$

en remplaçant B_1 par zéro. On déduit, inversement,

$$(29) \quad 2 S_{n+1} = \begin{vmatrix} (n+1) S_n^2 & C_{n+1}^2 B_2 & C_{n+1}^4 B_4 & \dots & 0 & 0 \\ n S_{n-1}^2 & 1 & C_n^2 B_2 & \dots & 0 & 0 \\ (n-1) S_{n-2}^2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4 S_3^2 & 0 & 0 & \dots & C_4^2 B_2 & 0 \\ 3 S_2^2 & 0 & 0 & \dots & 1 & C_3^2 B_2 \\ 2 S_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il résulte immédiatement de la formule (13) que les rapports

$$\frac{S_n}{x} \quad \text{et} \quad \frac{S_{n+1}}{x^2}$$

ont respectivement pour valeurs

$$B_n \quad \text{et} \quad \frac{2n+1}{2} B_{n+1}$$

lorsque x tend vers zéro. Si l'on introduit ces hypothèses dans les relations précédentes, dans les relations (27) et (29), par exemple, on trouve

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} B_{m+n} &= B^m \frac{(B+B')^{n+1} - B'^{n+1}}{n+1} \\ &+ B^n \frac{(B+B')^{m+1} - B'^{m+1}}{m+1}, \end{aligned} \right.$$

et

$$(31) \quad (2n+1)B_m = \begin{vmatrix} (n+1)B_n^2 & C_{n+1}^2 B_2 & C_{n+1}^4 B_4 & \dots & 0 & 0 \\ nB_{n-1}^2 & 1 & C_n^2 B_2 & \dots & 0 & 0 \\ (n-1)B_{n-2}^2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4B_3^2 & 0 & 0 & \dots & C_4^2 B_2 & 0 \\ 3B_2^2 & 0 & 0 & \dots & 1 & C_3^2 B_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$