

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 142-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__142_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 18

(voir 1^{re} série, t. I, p. 123);

PAR M. H. BROCARD.

On donne cinq points d'une courbe du second degré et une droite située sur le plan des cinq points. Déterminer les points de rencontre de la courbe et de la droite.

La solution de cette question se rattache à une propriété des coniques, dont nous allons rappeler brièvement la démonstration.

THÉORÈME. — *Si l'on coupe une conique par deux systèmes de sécantes parallèles OA, OC; O' A', O' C', on a, entre les segments déterminés sur les sécantes, la relation*

$$\frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \frac{O'A' \cdot O'B'}{O'C' \cdot O'D'}$$

Prenons pour axes de coordonnées les deux sécantes OA, OC. L'équation de la conique sera

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

faisant successivement x et y nuls, on a

$$OA \cdot OB = \frac{F}{C}, \quad OC \cdot OD = \frac{F}{A};$$

donc

$$\frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \frac{A}{C}.$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, A et C restent invariables; le rapport en question est donc constant. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Cette propriété établie, soient a, b, c, d, e les cinq points donnés et xy la droite donnée.

Joignons c, d par la droite cd , qui coupe xy en o ; et, par les points a, b , menons des parallèles af, bg à xy , jusqu'à leurs rencontres en o', o'' avec la droite cd ou $o'o$. Nous aurons

$$ox \cdot oy = \frac{o'a \cdot o'f}{o'd \cdot o'c} \cdot od \cdot oc \quad (*).$$

D'ailleurs, les droites af et bg passant, respectivement, par les points a, b de la conique, on peut, par la construction précédente, obtenir les points f et g (**); et, par suite, joindre les milieux de af et de bg , ce qui donne une droite qui coupe xy en son milieu ω . Alors on a

$$ox + oy = 2 \cdot o\omega.$$

On est donc ramené à construire un rectangle dont on connaît la surface et la somme (ou la différence) des côtés.

(*) f et g représentent les points où les parallèles af, bg coupent la courbe.

(**) Les points f et g ne peuvent être obtenus au moyen de cette construction qui est indépendante de la position du cinquième, des points donnés e . Mais la construction dont il s'agit ramène la question proposée à celle-ci qui en est un cas particulier : On donne sur un même plan cinq points a, b, c, d, e d'une conique et une droite af qui passe par l'un de ces points a , déterminer le second point d'intersection f de la courbe et de la droite. La solution de cette dernière question n'offre aucune difficulté, puisque l'égalité des rapports anharmoniques des deux faisceaux $(a.bcdf)$ et $(e.bcdf)$ fait immédiatement connaître la direction du rayon ef . (G.)