NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. LIGUINE

Sur les systèmes de tiges articulées

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14 (1875), p. 529-560

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__529_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES SYSTÈMES DE TIGES ARTICULÉES;

PAR M. V. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

1. L'étude récente des divers systèmes de tiges articulées, à liaison complète, a commencé par celle des systèmes à six tiges, et même, parmi toutes les dispositions connues actuellement, la plupart ne sont encore que des systèmes de ce genre particulier ou des combinaisons simples de ces systèmes.

Ces divers systèmes à six tiges ont été inventés, pour la plupart, indépendamment l'un de l'autre et figurent ainsi dans la question comme des dispositions isolées et distinctes, dont rien ne paraît indiquer une liaison mutuelle. Je me propose, dans cette Note, de les étudier sous un point de vue complétement général, ce qui me permettra : 1° d'indiquer les conditions caractéristiques qui distinguent le genre de systèmes à six tiges, étudié jusqu'à présent, de toutes les autres dispositions possibles du même nombre de tiges, et qui assignent certaines limites aux recherches de nouvelles combinaisons utiles du même genre; 2° de décrire un système dont les dispositions connues à six tiges (*) ne sont que de simples cas particuliers; 3° de passer brièvement en revue, en discutant ce système général, tous les systèmes connus à six tiges, et d'exposer à cette occasion quelques observa-

(*) Le système récemment proposé par M. Kemp, que j'ai décrit dans le n° 7 de cette Note, ne doit pas compter dans ce nombre, car il présente, comme on le verra, un type tout à fait exceptionnel, qui ne se rattache pas du tout à tous les autres systèmes connus à six tiges, puisqu'il ne jouit pas de la propriété fondamentale, commune à ces derniers, d'avoir constamment trois articulations en ligne droite pendant le mouvement.

tions nouvelles relatives à ces derniers. Les systèmes à six tiges formant, comme je l'ai déjà observé, la grande majorité de tous les types proposés de systèmes articulés en général, il ne me restait à décrire qu'un très-petit nombre de dispositions à huit et à quatre tiges, pour donner en même temps, par ce travail, une énumération complète de tous les types de systèmes articulés actuellement connus, énumération qui peut être utile aux personnes s'occupant de la question; c'est ce que j'ai fait dans un appendice placé à la fin de cette Note.

Pour abréger le langage, je nommerai tout système articulé à six tiges et à liaison complète *élément articulé*.

2. Chaque élément articulé se compose nécessairement de six tiges et de sept articulations, en comptant les points où sont réunies trois tiges pour deux articulations (*). Comme l'a déjà fait observer M. Sylvester (**), tous les éléments et systèmes articulés auxquels on a été conduit par la découverte de M. Peaucellier peuvent, en dernière analyse, être considérés comme des assemblages de *couples* de tiges ou de *dyades*, c'est-à-dire de systèmes de deux tiges réunies par une articulation, systèmes dont le compas ordinaire fournit un exemple très-connu; et c'est en vertu de cette propriété que M. Sylvester avait même proposé de donner à ces dispositions le nom de

(*) M. Sylvester, dans une lecture, aussi belle que savante, qu'il a faite l'année dernière a l'Institution royale de la Grande-Bretagne sur la *Transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne*, lecture qui a été publiée dans la *Revue scientifique*, 2e série, 4e année, 1874, p. 490-498, a énoncé la règle suivante, facile à démontrer : Pour qu'un système de tiges articulées soit à liaison complète, il faut qu'il existe entre le nombre n de tiges et le nombre m des articulations le rapport numérique $3n - 2m = 4$, en comptant chaque point où sont réunies k tiges pour $k - 1$ articulations; par conséquent, pour un système de six tiges, on a $m = 7$.

(**) *Voir* la lecture citée, *Revue scientifique*, 2e série, 4e année, p. 497.

dyadismes. En se plaçant à ce point de vue, on obtient pour les éléments en question le mode de génération général suivant.

Prenons une dyade ou un couple de tiges, et imaginons que l'on rend fixe son articulation; nommons cette articulation fixe le *point d'appui* (*) et les deux tiges qui y sont réunies les *connecteurs*. Prenons ensuite un second couple et joignons, au moyen de deux articulations, ses deux tiges aux deux tiges du premier couple, en articulant les extrémités libres des tiges de l'un des deux couples à deux points quelconques, ou aux extrémités libres des deux tiges de l'autre couple (**); nommons les deux tiges de ce nouveau couple les *premiers guides*, et l'articulation qui les réunit le *premier pôle*; nous aurons formé ainsi un quadrilatère articulé qui a pour côtés les deux connecteurs et les deux guides, ou certaines parties de ces tiges. Prenons enfin un troisième couple et adaptons ses extrémités libres, au moyen d'articulations, à deux points de deux côtés adjacents (***) du quadrilatère mentionné, ou aux extrémités des prolongements de deux côtés adjacents, si ces prolongements existent; donnons aux tiges de ce troisième couple et à l'articulation qui les

---

(*) J'ai puisé la plupart des noms employés ici dans la lecture citée de M. Sylvester.

(**) Les différents cas que l'on a à considérer ici ne pouvant pas être réunis dans une même figure, le lecteur est prié de reproduire ces cas en dessin lui-même.

(***) Cette dernière restriction est inutile pour les éléments que je nomme plus loin de la première espèce et qui, comme on verra, sont de beaucoup les plus importants, puisqu'elle y est remplie d'elle-même; mais, pour ceux de la deuxième espèce, il y a lieu de la faire, car, dans ces derniers, parmi les quatre modes possibles de jonction du troisième couple, il y a deux dispositions où les extrémités libres des deuxièmes guides s'articulent à deux côtés opposés du premier quadrilatère, et dans ces deux cas on obtiendrait, au lieu du second quadrilatère, un pentagone articulé, ce qui compliquerait beaucoup les raisonnements.

joint les noms de *deuxièmes guides* et de *deuxième pôle;* nous aurons formé par là un second quadrilatère articulé, ayant un sommet et un angle communs avec le premier; mais les droites qui forment ce nouveau quadrilatère peuvent être différentes. Il est clair, en effet, que la jonction du troisième couple à l'assemblage des deux premiers peut s'effectuer de trois manières distinctes : les extrémités libres de ce troisième couple peuvent être jointes ou aux deux premiers guides, ou aux deux connecteurs, ou à un des premiers guides et à un connecteur adjacent; dans le premier cas, le nouveau quadrilatère sera formé par les quatre guides, dans le second par les deux connecteurs et les deux deuxièmes guides, dans le troisième par trois des quatre guides et l'un des deux connecteurs. Dans tous les cas, la réunion considérée de trois couples formera un élément à six tiges et à sept articulations, et l'on remarquera que cet élément est toujours composé de deux quadrilatères articulés. Nous dirons que l'élément est de *première espèce,* quand le mode de jonction du troisième couple rentre dans les deux premiers des trois cas cités, et qu'il est de la *deuxième espèce,* lorsque ce mode de jonction rentre dans le dernier de ces cas. Une autre distinction qu'il est encore utile de faire dans le cas où le troisième couple est adapté aux deux premiers guides est relative à la position du point d'appui par rapport au second quadrilatère articulé; le point d'appui peut être situé à l'extérieur ou à l'intérieur de ce quadrilatère : dans le premier cas, l'élément sera dit *positif,* dans le second, *négatif.*

D'après ce qui vient d'être dit, parmi les six tiges de chaque élément, il y a à distinguer les deux connecteurs, les deux premiers et les deux deuxièmes guides, et parmi ses sept articulations on distingue le point d'appui et les deux pôles. Les distances du point d'appui aux deux

pôles seront dites les *bras* de l'élément; en considérant ces bras comme des rayons vecteurs partant d'une même origine fixe, le but de chaque élément consiste à établir une relation constante entre ces rayons vecteurs, qui permette d'opérer une certaine transformation sur les coordonnées polaires, de manière que, l'un des pôles décrivant une ligne donnée, l'autre décrive une seconde ligne, liée à la première par la loi de transformation qui convient à l'élément considéré.

Afin d'éviter d'inutiles répétitions, convenons, une fois pour toutes, de désigner toujours, sur nos figures, par A le point d'appui, par P le premier et par P_1 le deuxième pôle, par N, N′ les deux points de jonction des premiers guides avec les connecteurs, et par M, M′ les deux points de jonction des deuxièmes guides avec les premiers guides ou avec les connecteurs, et de désigner, dans nos formules, par ρ, ρ_1 les deux bras AP, AP_1, par c, c' les distances AN, AN′ des articulations N, N′ au point d'appui, par n, n' les distances PN, PN′ des mêmes articulations au premier pôle, par m, m' les deuxièmes guides P_1M, P_1M' pris en entier, enfin par m_1, m'_1 les distances PM, PM′ des articulations M, M′ au premier pôle, quand les deuxièmes guides s'articulent aux premiers guides, et par c_1, c'_1 les distances AM, AM′ des mêmes articulations au point d'appui, lorsque les deuxièmes guides s'articulent aux connecteurs.

3. Si maintenant on compare l'élément général que nous venons d'obtenir par la voie de composition de trois couples de tiges avec les éléments qui ont été proposés depuis la découverte de M. Peaucellier, on voit immédiatement que ces derniers ne sont tous que des variétés du premier, caractérisées par les deux propriétés particulières que voici : 1° ils sont tous de la première

espèce; 2° quel que soit le mouvement de l'élément, trois des sept articulations, le point d'appui et les deux pôles, restent constamment en ligne droite pendant ce mouvement.

D'autre part, si l'on examine attentivement et d'une manière générale les conditions suffisantes pour que le point d'appui et les deux pôles d'un élément de la première espèce restent constamment en ligne droite, on reconnaît qu'il suffit pour cela : 1° ou que dans une seule position de l'appareil les deux quadrilatères articulés, dont l'élément est toujours composé, soient semblables et semblablement placés; 2° ou que dans une seule position de l'appareil les trois sommets des deux quadrilatères, qui représentent le point d'appui et les deux pôles, soient en ligne droite, et les deux diagonales de chaque quadrilatère se coupent à angle droit.

En effet, pour que les trois points A, P, P_1 restent continuellement en ligne droite, il faut évidemment que les deux diagonales AP, P_1P des deux quadrilatères PNAN′, PMP_1M' coïncident constamment en direction pendant toute la durée du mouvement de l'instrument; et, pour que cette coïncidence continuelle ait lieu, il suffit que les deux diagonales NN′, MM′ soient parallèles dans une seule position de l'appareil, et que l'angle formé par les diagonales AP, NN′ de l'un des quadrilatères soit égal à l'angle formé par les diagonales P_1P, MM′ de l'autre dans chaque position de l'élément. Car les deux diagonales NN′, MM′ étant parallèles dans une seule position de l'appareil, elles le seront dans une position quelconque, en vertu de la proportion

$$NM : MP = N'M' : M'P,$$

dont les quatre termes restent constants pendant le mouvement; et si, dans chaque position, on a

$$NN' \text{ parallèle à } MM' \quad \text{et} \quad \text{angle}(NN', AP) = \text{angle}(MM', P_1P),$$

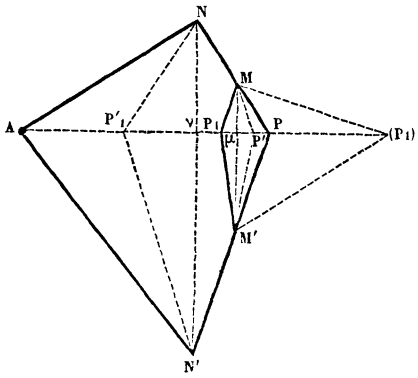
les deux droites AP, P_1P devront constamment coïncider, car elles ont toujours un point commun P. Mais les deux conditions, le parallélisme des diagonales NN', MM' dans une seule position de l'appareil et l'égalité continuelle des angles (NN', AP), (MM', P_1P), seront remplies dans chacun des deux cas suivants : 1° si, dans une seule position de l'élément, les deux quadrilatères PNAN', PMP_1M' sont semblables et semblablement placés ; 2° si, dans une seule position de l'élément, les trois points A, P, P_1 sont en ligne droite, et NN' perpendiculaire à AP, MM' perpendiculaire à P_1P. Car, dans le premier cas, il est aisé de voir que, si les deux quadrilatères PNAN', PMP_1M' sont semblables et semblablement placés dans une seule position de l'élément, ils jouiront des mêmes propriétés dans toutes les positions de l'appareil, et, par conséquent, les angles homologues (NN', AP), (MM', P_1P) seront constamment égaux. Dans le second cas, le parallélisme des diagonales NN', MM' aura lieu pour la position où les trois points A, P, P_1 sont en ligne droite; car, dans cette position, ces diagonales seront perpendiculaires à une même droite AP_1P; et l'égalité des angles (NN', AP), (MM', P_1P) aura lieu constamment pendant le mouvement en vertu de cette propriété facile à démontrer, que, de quelque manière que l'on déforme un quadrilatère dont les diagonales se coupent à angle droit et dont les côtés ont des longueurs invariables, ses diagonales resteront toujours perpendiculaires entre elles (*).

Cela posé, on voit que l'on peut former un élément de

(*) Cette propriété est une conséquence immédiate d'une relation très-simple entre les côtés d'un quadrilatère à diagonales rectangulaires, relation qui consiste en ce que la somme des carrés de deux côtés opposés d'un pareil quadrilatère est égale à la somme des carrés des deux autres côtés.

la première espèce, dont le point d'appui et les deux pôles restent constamment en ligne droite, de deux manières distinctes : ou en construisant un quadrilatère quelconque et en menant par un point de l'une de ses diagonales deux droites parallèles à deux côtés aboutissant à l'une des extrémités de cette diagonale jusqu'à la rencontre avec les deux autres côtés, ou en construisant un quadrilatère à diagonales rectangulaires et en joignant un point de l'une de ces diagonales à deux points situés à la fois sur deux côtés aboutissant à l'une des extrémités de cette diagonale et sur une même perpendiculaire à cette dernière droite. C'est dans le dernier de ces deux modes de génération que rentrent les éléments qui ont été étudiés depuis la découverte de M. Peaucellier; par conséquent, le type le plus général de ce genre sera l'élément représenté sur les *fig.* 1 ou 2, et que je nommerai

Fig. 1.



par cette raison *élément généralisé*. Je vais faire voir comment les éléments proposés en peuvent être déduits comme cas particuliers.

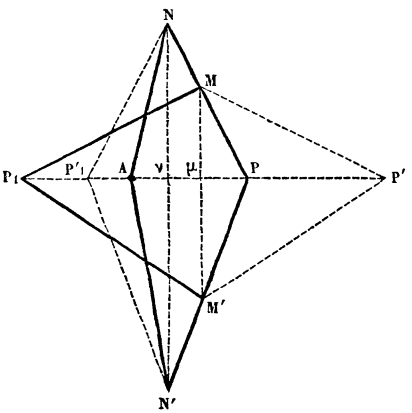
4. Pour cela, je commencerai par établir la loi de la

transformation effectuée par cet élément sur les bras ou rayons vecteurs. En employant les notations adoptées à la fin du n° 2, cette loi consiste en ce que, pendant toute la durée d'un mouvement quelconque de l'appareil, il existe entre les bras ou rayons vecteurs ρ, ρ_1 la relation

$$(1) \qquad \frac{\rho[(\rho \mp \rho_1)^2 + m_1^2 - n^2]}{(\rho \mp \rho_1)(\rho^2 + n^2 - c^2)} = \frac{m_1}{n},$$

où il faut prendre les signes supérieurs quand l'élément est positif (*fig.* 1), et les signes inférieurs quand il est négatif (*fig.* 2). Il suffira de démontrer l'équation (1)

Fig. 2.



pour le premier de ces deux cas; la *fig.* 2 rend parfaitement compte des modifications que l'on aura à introduire dans la démonstration pour le second cas; en outre, cette démonstration s'appliquera encore, et sans aucune modification, au cas où $m_1 > n$, cas opposé à celui des *fig.* 1 et 2. Enfin la même relation (1), prise avec les signes supérieurs, conviendra aussi au cas où le second

quadrilatère formé par les quatre guides présenterait, au lieu de la disposition considérée $MPM'P_1$ (*fig.* 1), la disposition $MPM'(P_1)$, c'est-à-dire où le deuxième pôle se trouverait à l'extérieur du premier quadrilatère formé par les connecteurs et les premiers guides, et où en même temps le second quadrilatère ne renfermerait pas le point d'appui.

Prenons dans la *fig.* 1, sur la diagonale AP, deux points P' et P'_1 tels que, μ et ν désignant respectivement les points d'intersection des diagonales MM', P_1P et NN', AP, on ait $\mu P' = \mu P_1$, $\nu P'_1 = \nu P$, et joignons MP' et NP'_1; on aura alors évidemment, en nommant pour un instant $AP' = \rho'$, $AP'_1 = \rho'_1$,

$$\rho_1 = A\mu - \mu P_1,$$
$$\rho' = A\mu + \mu P_1,$$

et par conséquent

$$\rho_1\rho' = \overline{A\mu}^2 - \overline{\mu P_1}^2 = (AP - \mu P)^2 - \overline{\mu P_1}^2$$
$$= \overline{AP}^2 + \overline{\mu P}^2 - \overline{\mu P_1}^2 - 2\,AP.\mu P,$$

ou

$$\rho_1\rho' = \overline{AP}^2 + \overline{MP}^2 - \overline{M\mu}^2 - \overline{MP_1}^2 + \overline{M\mu}^2 - 2\,AP.\mu P,$$

ou

$$(\alpha) \qquad \rho_1\rho' = \rho^2 + m_1^2 - m^2 - 2\rho.\mu P.$$

De même

$$\rho = A\nu + \nu P,$$
$$\rho'_1 = A\nu - \nu P;$$

donc

$$\rho\rho'_1 = \overline{A\nu}^2 - \overline{\nu P}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{N\nu}^2 - \overline{NP}^2 + \overline{N\nu}^2,$$

ou

$$(\beta) \qquad \rho\rho'_1 = c^2 - n^2.$$

Mais

$$\rho' = A\mu + \mu P' = A\mu + A\mu - \rho_1 = 2A\mu - \rho_1 = 2(\rho - \mu P) - \rho_1,$$

$$\rho'_1 = AP - PP'_1 = \rho - 2\nu P,$$

et, comme les triangles semblables $M\mu P$, $N\nu P$ donnent la proportion

$$\nu P : \mu P = NP : MP = n : m_1,$$

d'où

$$\nu P = \frac{n}{m_1}\mu P,$$

il s'ensuit que

$$\rho' = 2\rho - \rho_1 - 2\mu P,$$

$$\rho'_1 = \rho - 2\frac{n}{m_1}\mu P.$$

En substituant ces valeurs de ρ', ρ'_1 dans les égalités (α), (β), on aura

$$\rho_1(2\rho - \rho_1 - 2\mu P) = \rho^2 + m_1^2 - m^2 - 2\rho \cdot \mu P,$$

$$\rho\left(\rho - 2\frac{n}{m_1}\mu P\right) = c^2 - n^2,$$

ou

$$2\mu P(\rho - \rho_1) = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 + m_1^2 - m^2,$$

$$2\mu P\frac{n}{m_1}\rho = \rho^2 + n^2 - c^2,$$

et, en divisant la première de ces équations par la seconde, on obtient la relation cherchée (1), prise avec les signes supérieurs.

Remarquons que la relation (1) est tout à fait indépendante des grandeurs des tiges AN', P_1M', PN', PM' qui se trouvent de l'autre côté de la diagonale AP, et que, par conséquent, cette relation reste identiquement la même pour tous les éléments de différents paramètres que l'on obtient en changeant arbitrairement le lieu du point N' sur la droite $N\nu$ indéfiniment prolongée.

5. Je ferai voir maintenant comment les différents éléments connus se déduisent de l'élément généralisé, et j'ajouterai à cette occasion quelques observations sur plusieurs propriétés de ces variétés.

I. *Élément de M. Peaucellier généralisé, indiqué par M. Sylvester* (*) (*fig.* 3). — Pour obtenir cet élément, imaginons que, dans la *fig.* 1, le point P soit rendu fixe au lieu du point A ; les deuxièmes guides seront alors articulés aux deux connecteurs, et l'on aura l'élément représenté sur la *fig.* 3. Pour trouver la relation que cet appareil établit entre les bras ρ, ρ_1, il faut, d'après les notations adoptées (n° 2), changer dans la formule géné-

Fig. 3.

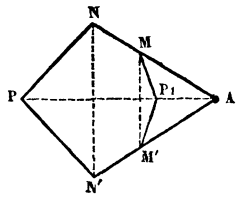
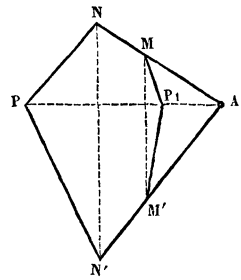


Fig. 4.



rale (1), prise avec les signes supérieurs, ρ_1 en $\rho - \rho_1$, c en n, n en c, m_1 en c_1, ce qui donnera, pour l'élément actuel, la relation

$$\frac{\rho(\rho_1^2 + c_1^2 - m^2)}{\rho_1(\rho^2 + c^2 - n^2)} = \frac{c_1}{c}. \tag{2}$$

(*) Voir *Revue scientifique,* tome cité, p. 498. C'est l'étude de ce système qui a servi de point de départ à l'intéressant travail de M. Saint-Loup, *Des systèmes articulés simples et multiples et de leurs applications*, inséré dans les *Mémoires de la Société d'émulation du Doubs* pour 1875. Les deux formules fondamentales (I) et (II) de M. Saint-Loup correspondent aux formules (2) et (3) de notre Mémoire.

On n'a pas à considérer ici le cas des signes inférieurs de la relation (1); car, dans la disposition actuelle, le point d'appui est le sommet commun des deux quadrilatères de l'élément, et ne peut, par conséquent, se trouver dans l'intérieur de l'un d'eux.

Remarquons que la restriction AN = AN', AM = AM', indiquée par M. Sylvester, présentant, il est vrai, l'avantage d'une disposition parfaitement symétrique, n'est cependant pas nécessaire; en l'omettant et en conservant seulement les conditions NN' perpendiculaire à AP, MM' perpendiculaire à AP, on obtient l'élément plus général représenté sur la *fig.* 4, qui satisfait à la même relation (2), vu que, d'après une remarque faite plus haut, la relation (1) ne dépend que des tiges situées d'un côté de la diagonale AP.

Observons encore que les éléments des *fig.* 3 et 4 peuvent servir pour la résolution du même problème que M. Mannheim avait résolu par l'élément II, dont nous allons nous occuper tout à l'heure. En effet, il est aisé de vérifier, en éliminant ρ_1 entre la relation (2) et l'équation $\rho_1^2 - \alpha\cos\theta.\rho_1 + \beta = 0$, ou l'équation $\rho_1 = \alpha\cos\theta$, α et β étant des constantes, que, si le point P_1 décrit une circonférence, le point P décrira une anallagmatique du troisième ou du quatrième ordre, selon que le cercle décrit par P_1 passe ou ne passe pas par le point fixe A.

Si, dans l'élément de la *fig.* 3, ou dans celui de la *fig.* 4, on fixe le point P_1 au lieu du point A, il faudra changer respectivement dans ces figures les lettres A, P, P_1, M, M', N, N' en P, P_1, A, N, N', M, M', et dans l'équation (2), c, c_1, n, m, ρ, ρ_1 en m_1, n, m, c, $\rho + \rho_1$, ρ; la loi de transformation deviendra donc dans ce cas

$$(3) \qquad \frac{(\rho + \rho_1)(\rho^2 + n^2 - c^2)}{\rho[(\rho + \rho_1) + m_1^2 - m^2]} = \frac{n}{m_1}.$$

II. *Élément proposé par M. Mannheim pour décrire une anallagmatique du quatrième ordre* (*) (*fig.* 5 et 6).

Fig. 5.

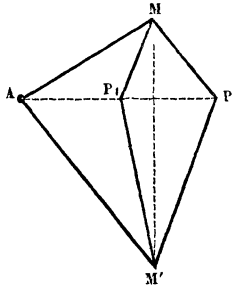
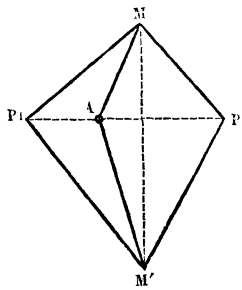


Fig. 6.



— On obtient cet élément de l'élément généralisé en y posant $n = m_1$; les *fig.* 1 et 2 prennent alors l'aspect plus simple des *fig.* 5 et 6, et la relation (1) devient

$$\frac{\rho(\rho_1^2 + c^2 - m^2)}{\rho_1(\rho^2 + c^2 - m_1^2)} = \pm 1, \tag{4}$$

où le signe + correspond à la forme positive (*fig.* 5) et le signe — à la forme négative (*fig.* 6).

M. Mannheim a trouvé qu'en général, lorsque dans cet élément le point A est fixe et que le pôle P_1 décrit une circonférence, l'autre pôle P décrit une anallagmatique du quatrième ordre. On peut ajouter que, quand, en particulier, le point P_1 décrit une circonférence passant par le point fixe A, le point P décrit une anallagmatique du troisième ordre.

Si l'on fixe le point P_1 au lieu du point A, on devra changer, dans les *fig.* 5 et 6, P_1, A en A, P_1, et, dans la formule (4), c, m, ρ en m, c, $\rho + \rho_1$ dans le cas de la

(*) Communication faite à la Société mathématique de France dans la séance du 9 décembre 1874. *Voir* le *Bulletin* de cette Société, t. III, p. 17.

forme positive, et en m, c, $\rho - \rho_1$ dans le cas de la forme négative, ce qui donne la même relation (4), aux signes près,

$$\frac{\rho(\rho_1^2 + c^2 - m^2)}{\rho_1(\rho^2 + c^2 - m_1^2)} = \mp 1, \tag{5}$$

le signe — correspondant ici à la *fig.* 5 qui, après la fixation du point P_1, représente un élément négatif, et le signe + correspondant à la *fig.* 6 qui représente actuellement un élément positif.

On voit ainsi que l'élément de M. Mannheim peut servir de deux manières différentes à décrire une anallagmatique du troisième ou du quatrième ordre; on peut fixer A et faire décrire à P_1 une circonférence, ou bien on peut fixer P_1 et faire décrire à A une circonférence; dans les deux cas, le point P décrira l'anallagmatique demandée.

III. *Inverseur de M. Peaucellier* (*) (*fig.* 7 et 8). — Dans ce cas, $n = m_1 = m$, et l'équation fondamentale (1) donne la relation bien connue

$$\rho\rho_1 = \pm(c^2 - m^2), \tag{6}$$

où l'on prendra le signe + ou le signe —, selon que l'élément est positif (*fig.* 7) ou négatif (*fig.* 8).

(*) C'est la découverte de cet appareil qui a servi de point de départ à l'étude de tous les autres éléments articulés. Cette découverte, qui a résolu pour la première fois d'une manière rigoureuse l'important problème de la transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne, M. Peaucellier l'a énoncée en termes généraux et sous forme de question, en 1864, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, et en a donné ensuite un exposé détaillé, en 1873, dans le même journal. M. Lipkine, de Saint-Pétersbourg, a trouvé la même solution en 1870; il présenta aussitôt la description et la théorie de l'appareil à l'Académie de Saint-Pétersbourg (voir *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XVI, 1871), et en 1873 il en exposa un modèle à l'Exposition universelle de Vienne.

On remarquera que, d'après une observation faite plus haut sur la relation générale (1), on ne changerait

Fig. 7.

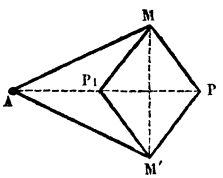
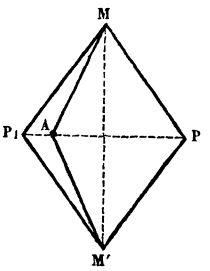


Fig. 8.



en rien les propriétés de l'inverseur, si, au lieu de faire tous les quatre côtés du quadrilatère PMP_1M' égaux entre eux, on ne les prenait qu'égaux deux à deux, de manière que $PM = P_1M$, $PM' = P_1M'$, comme le montrent les *fig.* 9 et 10. Ainsi, dans l'inverseur, le *losange*

Fig. 9.

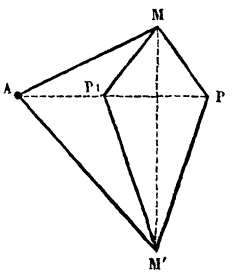
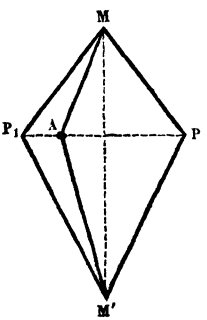


Fig. 10.



n'est pas indispensable, et ce n'est certainement que l'avantage de l'extrême simplicité qui l'a fait employer exclusivement.

Si, dans l'inverseur, on fixe le point P_1 au lieu du point A, on aura un élément qui a servi à M. Sylvester pour décrire les cubiques nodales qui sont les inverses des sections coniques, avec un sommet de la conique comme origine d'inversion (hypercissoïdes, hypocissoïdes et cissoïde ordinaire), et pour former, en vertu de cette propriété, un conicographe de treize tiges (*). Dans ce cas, on aura à changer dans les *fig.* 7, 8, 9 et 10, A en P_1 et P_1 en A, et à substituer, dans la formule (6), aux quantités m, c, ρ respectivement les quantités c, m, $\rho \pm \rho_1$, où il faut prendre le signe + ou le signe —, selon que l'élément primitif, dont A est le point d'appui, est positif ou négatif; on aura donc

$$\rho_1^2 \pm \rho\rho_1 = m^2 - c^2, \tag{7}$$

où l'on devra prendre le signe + ou le signe —, selon que, le point P_1 étant fixe, l'élément est négatif ou positif.

IV. *Élément de M. Sylvester.* — Cet élément lui a

Fig. 11.

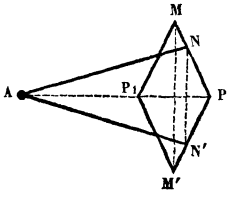
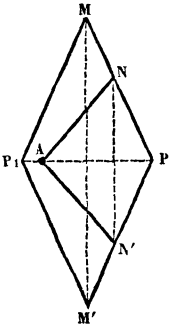


Fig. 12.



servi pour réaliser un système circulo-circulaire, c'est-à-dire une disposition propre à transformer un mouvement

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 494.

circulaire en un autre mouvement circulaire, différent de celui de M. Peaucellier (*) (*fig.* 11 et 12). On obtient ce nouvel élément en supposant $m = m_1$ et $n < m$ dans les *fig.* 1 et 2 et dans l'équation (1), ce qui donne les *fig.* 11 et 12, ou plus généralement les *fig.* 13 et 14, et la relation

$$(m - n)\rho^2 \pm n\rho\rho_1 = m(c^2 - n^2), \tag{8}$$

le signe + correspondant à la forme positive (*fig.* 11 et 13), et le signe — à la forme négative (*fig.* 12 et 14).

Fig. 13.

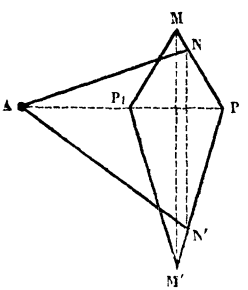
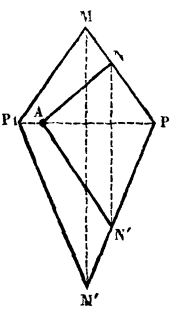


Fig. 14.



Lorsque, dans cet élément, le point P_1 décrit une circonférence qui ne passe pas par le point fixe A, le point P décrit une anallagmatique du quatrième ordre; cette disposition peut donc servir à la description de ces courbes aussi bien que l'élément II; mais, si la circonférence décrite par P_1 contient le point d'appui A, la courbe décrite par le point P se décompose en deux cercles, ce qui explique précisément comment cet élément a pu servir à M. Sylvester pour la transformation d'un mouvement circulaire en un autre mouvement circulaire.

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 493, note.

Si l'on fixe le point P_1 au lieu du point A, il faudra changer, dans les *fig.* 11-14, A, P_1, M, M', N, N' respectivement en P_1, A, N, N', M, M' et, dans la formule (8), c, m, n, ρ respectivement en $m, c, m_1, \rho + \rho_1$ ou en $m, c, m_1, \rho - \rho_1$, selon que l'on prend cette formule avec le signe + ou avec le signe —; on aura donc, pour la disposition actuelle, la relation

$$(9) \quad (c - m_1)\rho^2 + c\rho_1^2 \pm (2c - m_1)\rho\rho_1 = c(m^2 - m_1^2),$$

et l'on choisira ici le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que, le point P_1 étant fixe, le nouvel élément sera négatif ou positif.

V. *Extracteur binôme quadratique de M. Sylvester* (*) (*fig.* 15). — Dans l'élément généralisé (*fig.* 1

Fig. 15.

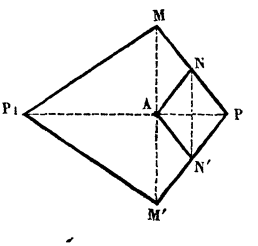
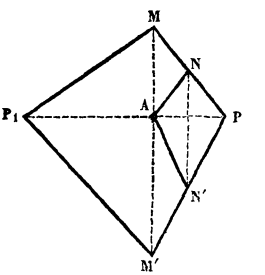


Fig. 16.



ou 2), fixons le point P_1 au lieu du point A; cela revient à changer respectivement, dans les *fig.* 1 et 2, A, P_1, M, M', N, N' en P_1, A, N, N', M, M' et, dans la formule (1), c, m, m_1, n en m, c, n, m_1, et ρ en $\rho + \rho_1$ ou $\rho - \rho_1$, selon que l'on prend la formule (1) avec les signes supérieurs ou avec les signes inférieurs; on aura

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 495.

ainsi

$$(10) \qquad \frac{(\rho \pm \rho_1)(\rho^2 + n^2 - c^2)}{\rho[(\rho \pm \rho_1)^2 + m_1^2 - m^2]} = \frac{n}{m_1}.$$

Faisons maintenant $n = c$, $m_1 = 2c$; cette hypothèse conduit à l'élément de la *fig.* 15, qui n'est autre chose que l'extracteur binôme quadratique de M. Sylvester, ou, plus généralement, à la *fig.* 16; la relation (10) devient

$$(11) \qquad \rho_1^2 - \rho^2 = m^2 - 4c^2.$$

Les doubles signes ont disparu, et il n'y a plus lieu de distinguer la forme positive et négative. La relation (11) fait voir que, lorsque l'un des bras est égal à $\sqrt{x^2 + k}$, k étant une constante, l'autre bras est égal à x, ce qui explique le nom de l'élément. En outre, cet appareil a servi à M. Sylvester pour tracer les lemniscatoïdes en général au moyen de sept tiges, et à M. Henrici pour tracer la lemniscate ordinaire au moyen de cinq tiges seulement (*).

Si, dans l'extracteur binôme quadratique, on fixait le point P_1 au lieu du point A, on tirerait, pour cette nouvelle disposition, directement de l'équation (1), en y posant $m_1 = m$, $n = 2m$, la relation

$$(12) \qquad \rho^2 \mp 2\rho\rho_1 = 4m^2 - c^2.$$

La même relation s'obtiendrait de l'équation (8), en y posant $n = 2m$; l'élément auquel on est conduit en fixant le point P_1 dans les *fig.* 15 ou 16 n'est donc qu'un cas particulier de l'élément IV, et, en se rappelant ce qui a été dit sur la description des anallagmatiques du quatrième ordre au moyen de ce dernier appareil, on voit que l'extracteur binôme quadratique peut aussi servir à la des-

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 493 et 495.

cription de ces courbes, si l'on y fixe le point P_1 au lieu du point A.

VI. *Élément pantographique* (*) (*fig.* 17 et 18). — Posons, dans notre élément généralisé, $m_1 = m$, $n = c$; les *fig.* 1 et 2 donneront les *fig.* 17 et 18, où ANPN',

Fig. 17.

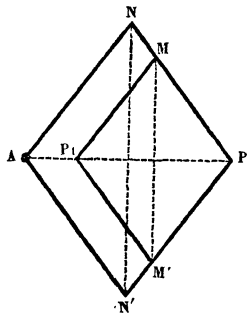
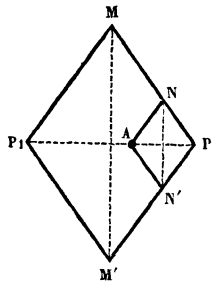


Fig. 18.



P_1MPM' sont deux losanges à côtés parallèles, ou, plus généralement, les *fig.* 19 et 20, et l'équation (1) deviendra

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \pm \frac{c}{c - m}, \tag{13}$$

le signe + correspondant à la forme positive (*fig.* 17 et 19), et le signe — à la forme négative (*fig.* 18 et 20). On voit, par l'équation (13), que l'élément considéré transforme une figure donnée en une autre figure semblable, ce qui justifie le nom de l'appareil.

Si, dans l'élément pantographique, on fixe le point P_1 au lieu du point A, il faudra changer, dans les *fig.* 17-20, A en P_1 et P_1 en A, N, N' en M, M', et M, M' en N,

(*) Voir *Revue scientifique,* tome cité, p. 492.

N′, et, dans la formule (13), c en m, m en c et ρ en $\rho + \rho_1$ ou en $\rho - \rho_1$, selon que l'on prend cette formule avec le

Fig. 19.

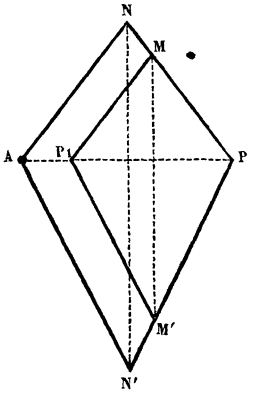
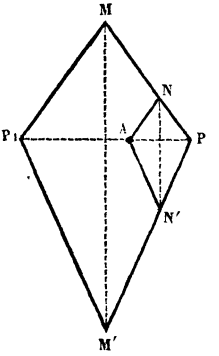


Fig. 20.



signe + ou le signe —; le nouvel élément effectuera donc une transformation exprimée par l'équation

$$(14) \qquad \frac{\rho}{\rho_1} = \pm \frac{c}{m - c},$$

et sera par conséquent aussi un élément pantographique, mais d'un module différent de celui de l'élément primitif.

En résumé, on voit donc que les différents éléments connus que nous venons de considérer ne sont en effet que des cas particuliers de l'élément généralisé.

6. Mais, comme il a été déjà dit plus haut, tous ces éléments connus sont de la première espèce, c'est-à-dire que, dans tous ces appareils, les deuxièmes guides sont toujours adaptés par leurs extrémités libres, ou aux deux connecteurs ou aux deux premiers guides. Après avoir examiné les appareils de ce genre, il est naturel de se

demander si l'on ne pourrait pas obtenir d'autres dispositions nouvelles et utiles parmi les éléments de la deuxième espèce, où les extrémités libres des deuxièmes guides s'appuient sur un connecteur et un premier guide adjacent.

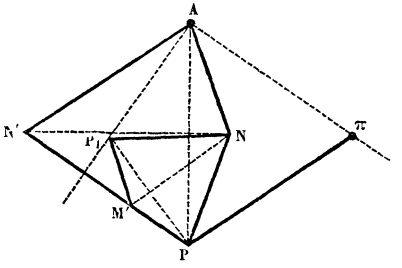
Je ne reproduis pas ici l'analyse un peu minutieuse, mais très-simple, de cette question. Cette analyse nous apprend qu'en se bornant au même degré de simplicité que pour le cas des éléments de la première espèce, c'est-à-dire en ne considérant que les éléments de la deuxième espèce, jouissant de la propriété que leur point d'appui et leurs deux pôles restent constamment en ligne droite pendant le mouvement de l'appareil, les seuls éléments auxquels on se trouve conduit sont l'extracteur binôme quadratique de M. Sylvester et l'élément pantographique sous une forme particulière servant à *doubler* les rayons vecteurs, ce qui nous indique une propriété curieuse de ces deux éléments, de pouvoir servir en même temps d'éléments de la première et de la deuxième espèce, selon que l'on fixe dans la *fig.* 15 le point A ou le point M, et dans la *fig.* 17, considérée dans l'hypothèse PM = MN, le point A ou le point N. On ne retrouve ainsi, parmi les éléments de la deuxième espèce, que des variétés déjà connues, ce qui montre que cette seconde solution possible du problème est stérile, et que, autant que l'on se borne à cette classe simple d'éléments, dont le point d'appui et les deux pôles sont assujettis à rester constamment en ligne droite, de nouvelles dispositions ne peuvent être cherchées que parmi les éléments de la première espèce.

7. Il a été proposé récemment, par M. Kemp, un système particulier à six tiges, présentant une nouvelle solution du problème de la transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne parfait. Ce

système ingénieux joue, parmi les éléments connus, un rôle tout à fait exceptionnel ; il ne jouit plus de la propriété commune à tous les éléments que nous venons d'étudier, d'avoir constamment trois de ses articulations, le point d'appui et les deux pôles, en ligne droite, et ne peut pas, par conséquent, être déduit comme cas particulier de notre élément généralisé. Néanmoins, pour compléter l'exposé de tous les systèmes connus à six tiges, nous jugeons à propos d'en donner ici la description et la théorie.

On forme un quadrilatère ANPN′ (*fig.* 21), à diago-

Fig. 21.



nales rectangulaires, dans lequel $AN = PN$, $AN' = PN'$; on prend le sommet A pour point d'appui, le sommet P pour premier pôle, et par conséquent les côtés $AN = c$, $AN' = c'$ pour connecteurs et les côtés $PN = c$, $PN' = c'$ pour premiers guides. On construit ensuite sur les côtés PN, PN′ un second quadrilatère $NPM'P_1$, tel que

$$NP_1 = NP = c, \quad P_1M' = PM' = \frac{c^2}{c'},$$

et l'on prend son sommet P_1 pour deuxième pôle et ses côtés P_1N, P_1M' pour deuxièmes guides. Dans cet élément, les bras seront représentés par les droites $AP = \rho$, $AP_1 = \rho_1$; et l'on peut faire voir que, si le pôle P décrit une circonférence passant par le point fixe A et dont

le centre π est symétrique au point N′ par rapport à la droite AP, le pôle P_1 décrira une droite qui passe par A et qui est perpendiculaire au côté N′P du premier quadrilatère ANPN′. En effet, pour faire décrire au point P la circonférence demandée, il suffit d'ajouter au système considéré de six tiges une septième tige $P\pi$ égale et parallèle à N′A et de fixer l'extrémité π de cette nouvelle tige. La figure $A\pi PN'$ restera un losange pendant toute la durée du mouvement de l'instrument, et ses deux diagonales AP, $N'\pi$ resteront, en vertu d'une propriété déjà mentionnée (n° 3), constamment perpendiculaires entre elles. Désignons respectivement par θ, θ_1 les angles $PA\pi$, $P_1A\pi$ que les deux bras ρ, ρ_1 font avec la droite fixe $A\pi$, par μ, ν les angles PAN, P_1AN que ces bras font avec le côté AN, et par α, β les angles opposés AN′P, ANP du quadrilatère ANPN′; on aura, dans une position quelconque de l'appareil,

$$\theta_1 = \theta + \nu - \mu, \quad \theta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

et, par conséquent,

$$\theta_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \nu - \mu.$$

D'autre part les deux quadrilatères ANPN′, M′PNP$_1$ étant constamment semblables, les triangles isoscèles ANP, ANP$_1$ donnent respectivement

$$\mu = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \quad \nu = 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

On aura donc

$$\theta_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2} - 90^\circ + \frac{\beta}{2} = 90^\circ,$$

c'est-à-dire que le rayon vecteur ρ_1 du point P_1 demeure constamment perpendiculaire à la droite fixe $A\pi$; le point P_1 décrit donc une droite AP_1 perpendiculaire à $A\pi$ ou à la droite N′P et passant par le point fixe A.

APPENDICE.

8. Pour donner une énumération complète de tous les types de systèmes articulés qui ont été proposés depuis la découverte de M. Peaucellier, il ne reste à ajouter à ce qui vient d'être dit sur les systèmes à six tiges que la description d'un petit nombre de systèmes à huit et à quatre tiges.

Systèmes a huit tiges.

I. *Protracteur de M. Peaucellier* (*). — Considérons un inverseur ordinaire à six tiges de M. Peaucellier, et joignons son deuxième pôle P_1 par une septième tige avec un point π situé de manière que $\pi P_1 = \pi A$ (*fig.* 22).

Fig. 22.

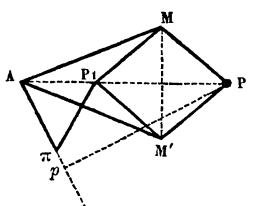
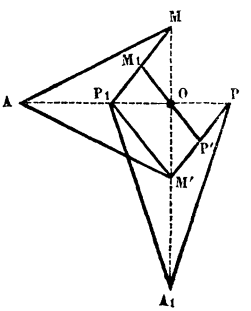


Fig. 23.



Si, outre le point A, on fixe dans ce système le point π, le pôle P_1 se déplacera suivant une circonférence passant par A et, d'après les propriétés connues de l'inverseur, le pôle P décrira une droite Pp perpendiculaire à la

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XII, année 1873.

ligne des centres $A\pi$; par conséquent, si l'on relie les deux points fixes, A, π par une nouvelle tige, et si l'on imagine une barre rigide liée invariablement au point p à cette huitième tige $A\pi$ suffisamment prolongée, perpendiculairement à la tige $A\pi$, cette barre sera pendant le mouvement de l'appareil constamment dirigée vers le point P. En rendant maintenant aux points A et π leur mobilité et en fixant le point P, on obtient un appareil à huit tiges qui jouit de cette propriété que, lorsque l'un des points de la barre liée d'une manière invariable en p, perpendiculairement à $A\pi$, décrit une courbe donnée $\rho = f(\theta)$, tout autre point de cette barre décrira une seconde courbe $\rho \pm c = f(\theta)$, que l'on obtient de la première, en augmentant ou en diminuant tous ses rayons vecteurs d'une quantité constante c, et qui constitue ce que l'on peut nommer la *protraction* ou la *rétraction* radiale de la courbe proposée. Ainsi, si un premier point de la barre décrivait une droite ou un cercle, un second point décrirait respectivement une conchoïde ordinaire ou un limaçon de Pascal, etc.

II. *Sytèmes à huit tiges de M. Sylvester* (*). — Dans un inverseur ordinaire à six tiges, substituons à la tige PM (*fig.* 23) une tige égale et parallèle M_1P', passant par le point d'intersection O des diagonales du losange; articulons aux points P_1, P deux nouvelles tiges A_1P, A_1P_1 réunies par une articulation en un point A_1 de la diagonale MM' prolongée, et fixons le point O. En prenant pour bras les longueurs $OA = \rho$, $OA_1 = \rho_1$, ce système à huit tiges établira entre ces bras la relation

$$\rho^2 + \rho_1^2 = \text{const.}$$

En effet, les deux droites AO, A_1O restant constamment

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 498.

perpendiculaires entre elles pendant le mouvement, on aura, dans chaque position de l'appareil,

$$\rho^2 = \overline{AM}^2 - \overline{MO}^2,$$

$$\rho_1^2 = \overline{A_1P_1}^2 - \overline{P_1O}^2 = \overline{A_1P_1}^2 - \left(\overline{P_1M'}^2 - \overline{OM'}^2\right),$$

d'où

$$\rho^2 + \rho_1^2 = \overline{AM}^2 + \overline{A_1P_1}^2 - \overline{P_1M'}^2,$$

ou, en posant

$$AM = AM' = c, \quad P_1M = P_1M' = PM' = P'M_1 = m,$$

$$A_1P = A_1P_1 = \gamma,$$

$$\rho^2 + \rho_1^2 = c^2 + \gamma^2 - m^2 = \text{const.}$$

On voit donc que cet appareil peut servir à la transformation de $\sqrt{k - x^2}$ en x, k étant une constante; en outre, M. Sylvester l'a employé pour la description de l'inverse d'une conique par rapport au centre de cette conique, et, en le combinant convenablement avec un inverseur à six tiges, pour la construction d'un conicographe d'un même nombre de tiges que celui de M. Peaucellier, mais pratiquement plus avantageux (*).

Remarquons qu'en choisissant dans ce système à huit tiges les paramètres, de manière à satisfaire à la condition $c^2 + \gamma^2 - m^2 = 1$, l'appareil effectuera la transformation de $\sqrt{1 - x^2}$ en x ou de $\cos\theta$ en $\sin\theta$. Et, si M. Sylvester emploie, pour la transformation du cosinus en sinus, cinq éléments à six tiges (**), cela ne tient qu'à cette circonstance que, dans le système considéré à huit tiges, les deux bras ne sont pas comptés sur une même droite, comme dans tous les éléments à six tiges, mais sur deux droites perpendiculaires entre elles, ce qui of-

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 498.

(**) *Ibid.*, p. 496.

frirait un grand inconvénient toutes les fois que l'on a à construire des combinaisons de plusieurs systèmes, comme cela a lieu dans les questions considérées par M. Sylvester.

Systèmes a quatre tiges.

I. *Système de M. Roberts* (*). — Soit CDD_1C_1 (*fig.* 24) un quadrilatère articulé formé de quatre tiges, et tel que les côtés *adjacents* soient égaux deux à deux, c'est-à-dire que $CC_1 = CD = a$, $D_1D = D_1C_1 = b$. Si l'on fixe les deux sommets C, C_1 ou la tige CC_1, chaque point de la tige DD_1 et du plan emporté par cette tige décrit une inverse de conique. La démonstration de cette propriété, due à M. Roberts, ne pourrait pas trouver place ici (**).

On voit donc que le système de M. Roberts offre un moyen de décrire une inverse de conique au moyen de trois tiges seulement. De plus, M. Mannheim a trouvé cette propriété aussi curieuse qu'élégante, que le déplacement de la tige DD_1, dans ce système, peut s'obtenir par le roulement d'un ovale de Descartes dans un ovale de Descartes.

II. *Système de M. Hart* (***). — Imaginons de nouveau un quadrilatère articulé CD_1DC_1, mais tel que les côtés *opposés* soient égaux deux à deux, c'est-à-dire que $CC_1 = DD_1 = a$, $CD_1 = C_1D = b$; nous aurons devant nous ou un parallélogramme ou un trapèze isoscèle;

(*) Voir *Revue scientifique*, 4e année, 2e série, numéro du 2 janvier 1875, p. 640.

(**) Cette démonstration est indiquée dans le compte rendu de la communication faite par M. Sylvester dans la troisième session de l'Association française pour l'avancement des sciences (Congrès de Lille, 1874), inséré dans la *Revue scientifique*, numéro du 2 janvier 1875.

(***) *Ibid.*

considérons le dernier cas représenté sur la *fig.* 25. Si, dans ce système, on fixe les deux sommets C, C_1 ou la tige CC_1, chaque point de la tige DD_1 et du plan emporté par cette tige décrira une inverse de conique (*), ce qui fournit un second moyen de décrire ces inverses

Fig. 24.

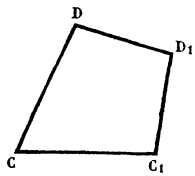
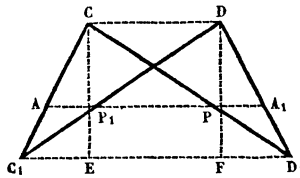


Fig. 25.



au moyen de trois tiges. La propriété analogue à celle qui a été trouvée par M. Mannheim pour le système de M. Roberts consiste ici en ce que le déplacement de la tige DD_1 s'obtient en faisant rouler une ellipse sur une ellipse égale ou une hyperbole sur une hyperbole égale; cette propriété est due à M. Clifford (**).

Si, dans le système à quatre tiges de M. Hart, on fixe, au lieu des deux sommets C, C_1, un point quelconque A du côté CC_1, et que l'on prenne sur les tiges CD_1, C_1D deux points P, P_1 situés avec le point A sur une même droite parallèle aux diagonales CD, C_1D_1 du trapèze, les trois points A, P, P_1 resteront toujours en ligne droite, et le produit des longueurs AP, AP_1 restera constant pendant le mouvement de l'instrument. Ainsi le système considéré présente un inverseur qui diffère essentiellement de celui de M. Peaucellier, en ce qu'il ne compte plus que quatre tiges au lieu de six. Pour démontrer la propriété

(*) On trouvera la démonstration de cette propriété dans le compte rendu cité de la communication de M. Sylvester.

(**) *Ibid.*

énoncée, posons $AP = \rho$, $AP_1 = \rho_1$, $AC_1 = a_1$, $AC = a_2$, $CD = \alpha$, $C_1D_1 = \beta$; la similitude des triangles CC_1D_1, CAP et C_1CD, C_1AP_1, similitude qui se conserve pendant le mouvement, donne les deux proportions

$$\rho : \beta = a_2 : a,$$
$$\rho_1 : \alpha = a_1 : a,$$

d'où

$$\rho\rho_1 = \frac{a_1 a_2}{a^2}\alpha\beta.$$

D'autre part, il est aisé de voir que le produit $\alpha\beta$ des diagonales du trapèze reste constant pendant le mouvement. En effet, en nommant δ la commune grandeur des projections C_1E, D_1F des côtés CC_1, DD_1 sur la diagonale C_1D_1, on a

$$\alpha\beta = \alpha(\alpha + 2\delta).$$

Mais les triangles rectangles C_1FD, C_1EC donnent respectivement, en désignant par h la hauteur CE du trapèze,

$$(\alpha + \delta)^2 + h^2 = b^2,$$
$$\delta^2 + h^2 = a^2.$$

En retranchant la seconde de ces égalités de la première, il vient

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha = b^2 - a^2,$$

et, par conséquent,

$$\alpha\beta = b^2 - a^2 = \text{const.}$$

Si l'on porte maintenant cette valeur du produit $\alpha\beta$ dans l'expression trouvée plus haut pour le produit $\rho\rho_1$, on obtient

$$\rho\rho_1 = \frac{a_1 a_2}{a^2}(b^2 - a^2).$$

Les quantités a, b, a_1, a_2 étant invariables, on voit que le produit $\rho\rho_1$ reste constant pendant le mouvement. On

pourrait démontrer d'une manière tout à fait analogue que, si l'on fixe un des trois points A_1, P_2, P au lieu du point A, les produits $A_1P.A_1P_1$, $P_1A_1.P_1A$, $PA.PA_1$ resteraient respectivement constants; l'appareil peut donc servir d'inverseur de quatre manières différentes.

D'après la propriété qui vient d'être démontrée, le point A étant fixe, si l'un des pôles P, P_1 décrit une circonférence passant par A, le second pôle décrira une droite. Le système de la *fig.* 25 donne donc la solution du problème de la transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne exact au moyen de cinq tiges seulement, en comptant la tige qui doit relier le pôle décrivant la circonférence au centre fixe de cette circonférence (*). Et, si l'on observe que, d'une part, tout système de tiges articulées servant à résoudre cette question doit être formé d'un nombre impair de tiges, et que, d'autre part, un système de trois tiges ne donne point de solution rigoureuse du problème, on voit que, parmi tous les systèmes imaginables de tiges articulées propres à résoudre rigoureusement la question de la transformation d'un mouvement circulaire en mouvement rectiligne, celui de M. Hart est formé du plus petit nombre possible de tiges (**).

(*) Dans la quatrième session de l'Association française pour l'avancement des sciences (Congrès de Nantes, 1875), M. Bréguet fils a fait voir un très-beau modèle en cuivre de ce système à cinq tiges.

(**) Les divers systèmes à quatre, six et huit tiges, décrits dans ce travail, épuisent, je crois, le nombre total des *types* connus de systèmes articulés, c'est-à-dire des systèmes *simples* et essentiellement distincts qui ont été proposés; tous les autres systèmes connus n'en présentent que des combinaisons plus ou moins compliquées. C'est à cette seconde classe de systèmes combinés ou *multiples* qu'appartiennent, par exemple, les divers *conicographes* de MM. Peaucellier, Sylvester, Hart, etc., à quinze, treize, onze, neuf, sept tiges (combinaisons d'un système propre à décrire l'inverse d'une conique, comme le système de M. Sylvester à huit tiges, ceux de MM. Roberts, Hart, etc., avec un inverseur de