

C. POSSE

## Sur les quadratures

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 14  
(1875), p. 49-62

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1875\\_2\\_14\\_\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__49_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

## SUR LES QUADRATURES;

PAR M. C. POSSE,

Privat-docent à l'Université de Saint-Petersbourg.

---

Les propriétés connues des fractions continues algébriques permettent d'obtenir sur-le-champ une formule générale pour l'évaluation approximative des intégrales de la forme

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \varphi(x) dx,$$

et dont la formule célèbre de Gauss n'est qu'un cas particulier. En faisant des hypothèses particulières sur la forme de la fonction donnée  $f(x)$ , on tombe, dans le cas de  $f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ , sur la formule connue

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} [\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)] + \dots$$

ou

$$(z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_n) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z).$$

Cette formule, déjà démontrée de diverses manières (\*), occupe un rang tout particulier parmi les autres formules du même genre : d'un côté, elle appartient à celles que donne la théorie des fractions continues avec le degré d'approximation qui leur est propre ; d'un autre, elle est une formule des quadratures à *coefficients égaux* (\*\*).

---

(\*) Voir M. CH. HERMITE, *Cours d'Analyse*, p. 452 ; M. MEHLER, *Journal de Crelle*, t. 63, p. 152.

(\*\*) Voir *Sur les Quadratures*, par M. P. TCHEBICHEFF (*Journal de Liouville*, 2<sup>e</sup> série, t. XVIII).

Je démontre qu'elle est la seule jouissant de cette double propriété, en me proposant de résoudre directement la question suivante :

*Trouver la forme de la fonction  $f(x)$  qui, restant positive entre les limites  $-1$  et  $+1$  de la variable, donne*

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \varphi(x) dx = k [\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)] \\ + a_n \varepsilon + a_{n+1} \varepsilon' + \dots,$$

$k$  étant indépendant de la forme de  $\varphi(x)$ , et

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} + \dots$$

En faisant  $\varphi(x) = \frac{1}{z-x}$ , intégrant les deux membres de l'égalité précédente par rapport à  $z$ , et passant ensuite des logarithmes aux nombres, on aperçoit immédiatement que la question proposée est équivalente à cette autre :

*Trouver la fonction  $f(x)$ , positive entre les limites  $-1$  et  $+1$  de la variable, pour laquelle*

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \log(z-x) dx = F(z) + \frac{\varepsilon}{z^n} + \frac{\varepsilon'}{z^{n+1}} + \dots,$$

$F(z)$  désignant une fonction entière de degré  $n$ .

D'autres cas particuliers, qu'on trouve développés dans cette Note, m'ont paru dignes d'attention, à cause de leur simplicité et de la facilité avec laquelle on les déduit de la formule générale.

1. La fonction  $f(x)$  restant positive entre les limites  $-1$  et  $+1$  de la variable, on sait que le développement

en fraction continue de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x) dx}{z-x}$$

peut être mis sous la forme

$$\frac{k}{z-\alpha + \frac{1}{\alpha z + \beta + \frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 + \dots}}}$$

tous les quotients incomplets étant linéaires par rapport à  $z$ .

Désignant par  $\frac{P_n}{Q_n}$  la réduite du rang  $n^{\text{ième}}$ , nous aurons

$$(1) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) dx}{z-x} = \frac{P_n}{Q_n} + \frac{\varepsilon}{z^{2n+1}} + \frac{\varepsilon'}{z^{2n+2}} + \dots$$

Soit

$$Q_n = C(z-x_1)(z-x_2)\dots(z-x_n),$$

$C$  étant une constante et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des quantités réelles, inégales et comprises entre les limites  $-1$  et  $+1$ ; nous obtiendrons

$$\frac{P_n}{Q_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[ \frac{P_n(x_i)}{Q'_n(x_i)} \frac{1}{z-x_i} \right].$$

Posant  $\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{2n} z^{2n} + \dots$ , multipliant les deux membres de la formule (1) par  $\varphi(z)$  et égalant de part et d'autre les coefficients de  $\frac{1}{z}$ , nous aurons la formule générale des quadratures

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_n(x_i)}{Q'_n(x_i)} \varphi(x_i) \Delta,$$

où  $\Delta$  est de la forme  $a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \dots$  et s'annule, par conséquent, chaque fois que  $\varphi(x)$  est une fonction entière d'un degré inférieur à  $2n$ .

Remarquant que

$$P_n(x_i) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) Q_n(x) dx}{x - x_i}$$

et dénotant par  $A_i$  le coefficient  $\frac{P_n(x_i)}{Q_n'(x_i)}$ , nous aurons

$$(2) \quad A_i = \frac{1}{Q_n'(x_i)} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) Q_n(x) dx}{x - x_i},$$

et la formule précédente prend la forme

$$(3) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \varphi(x_i) + \Delta.$$

La formule de Gauss correspond au cas de  $f(x) = 1$ .

2. Passant aux applications, nous ferons d'abord

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} &= \frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{\pi}{z + (\sqrt{z^2-1}-z)} \\ &= \frac{\pi}{z - \frac{1}{2z + (\sqrt{z^2-1}-z)}}, \end{aligned}$$

d'où le développement suivant :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{z - \frac{1}{2z - \frac{1}{2z - \dots}}}$$

Les expressions de  $Q_n$  et de la racine  $x_i$  sont ici

$$Q_n = \cos(n \arccos z) = \cos n\varphi, \text{ pour } z = \cos \varphi,$$

et

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) = \cos \alpha, \text{ pour } \alpha = \frac{2i-1}{2n}\pi.$$

La formule (2) donne

$$A_i = \frac{\sin\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)}{n \sin\left(\frac{2i-1}{2}\pi\right)} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi d\varphi}{\cos \varphi - \cos \alpha}$$

ou, observant que  $\cos n\alpha = 0$ ,

$$A_i = \frac{\sin \alpha}{n \sin n\alpha} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi - \cos n\alpha}{\cos \varphi - \cos \alpha} d\varphi.$$

Or, il est aisé de vérifier la relation suivante :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos n\varphi - \cos n\alpha}{\cos \varphi - \cos \alpha} \sin \alpha = \sin(n\alpha) + 2 \cos \varphi \sin(n-1)\alpha + \dots \\ \quad + 2 \cos(n-1)\varphi \sin \alpha, \end{array} \right.$$

où le nombre des termes à retenir dans le second membre est égal à  $n$ ; elle est évidemment vraie pour  $n=1$  et  $n=2$ , et se généralise de la manière ordinaire, en partant de ce que

$$\cos(n+1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi.$$

D'après cela, l'expression de  $A_i$  devient simplement

$$A_i = \frac{1}{n \sin n\alpha} \int_0^\pi \sin n\alpha d\varphi = \frac{\pi}{n}.$$

La formule (3) se réduit donc, dans le cas considéré,

à la formule connue

$$(5) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \varphi'(x_i) + a_{2n} \varepsilon + a_{2n+1} \varepsilon' = \dots$$

où

$$x_i = \cos \left( \frac{2i-1}{2n} \pi \right).$$

3. On aura deux autres formules très-simples, en posant

$$1^{\circ} \quad f(x) = \sqrt{1-x^2},$$

et

$$2^{\circ} \quad f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

1<sup>o</sup> Pour  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{z-x} &= \frac{\pi}{\sqrt{z^2-1} + z} = \frac{\pi}{2z - (z - \sqrt{z^2-1})} \\ &= \frac{\pi}{2z - \frac{1}{\sqrt{z^2-1} + z}}, \end{aligned}$$

d'où le développement

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{z-x} = \frac{\pi}{2z} - \frac{1}{2z} \frac{1}{2z} + \dots$$

Posant  $z = \cos \varphi$ , on aura, comme il est aisé de voir,

$$Q_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}, \quad x_i = \cos \left( \frac{i\pi}{n+1} \right) = \cos \alpha.$$

L'expression de  $A_i$  devient alors

$$A_i = - \frac{\sin^2 \left( \frac{i\pi}{n+1} \right)}{(n+1) \cos i\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\varphi \sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi - \cos \alpha}$$

ou, observant que  $\sin(n+1)\alpha = 0$ ,

$$A_i = - \frac{\sin^2 \alpha}{(n+1) \cos(n+1)\alpha} \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\varphi \sin \varphi - \sin(n+1)\alpha \sin \alpha}{\cos \varphi - \cos \alpha} d\varphi.$$

Or

$$\begin{aligned} & \sin(n+1)\varphi \sin \varphi - \sin(n+1)\alpha \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos n\varphi - \cos n\alpha - [\cos(n+2)\varphi - \cos(n+2)\alpha] \}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, à l'aide de la formule (4), après de simples réductions,

$$A_i = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \left( \frac{i\pi}{n+1} \right).$$

Ainsi l'on obtient cette formule très-simple

$$(6) \quad \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} \varphi(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=1}^{i=n} (1-x_i) \varphi(x_i) + \Delta,$$

où

$$x_i = \cos \left( \frac{i\pi}{n+1} \right).$$

2° Pour

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

na

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{z-x} = \pi \left( 1 - \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} \right) \\ &= \frac{2\pi}{2z+1} - \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z} - \dots \end{aligned}$$

Posant  $z = \cos \varphi$ , on obtient

$$Q_n = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\frac{1}{2}\varphi}, \quad x_i = \cos\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right) = \cos \alpha$$

et

$$A_i = \frac{4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha}{(2n+1) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)} \int_1^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right) \sin \frac{1}{2}\varphi d\varphi}{\cos \varphi - \cos \alpha}.$$

Comme

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) = 0,$$

on peut substituer sous le signe d'intégration, au lieu de

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right) \sin \frac{1}{2}\varphi,$$

l'expression

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right) \sin \frac{1}{2}\varphi - \sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) \sin \frac{1}{2}\alpha \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos n\varphi - \cos n\alpha - [\cos(n+1)\varphi - \cos(n+1)\alpha] \}, \end{aligned}$$

et de là, en vertu de la relation (4), on tire sans difficulté

$$A_i = \frac{4\pi}{2n+1} \sin^2\left(\frac{i\pi}{2n+1}\right) = \frac{2\pi}{2n+1} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right) \right].$$

Donc, dans le cas actuel, la formule (3) se réduit à la suivante :

$$(7) \quad \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \varphi(x) dx = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{i=1}^{i=n} (1-x_i) \varphi(x_i) + \Delta,$$

où

$$x_i = \cos \left( \frac{2i\pi}{2n+1} \right).$$

Les expressions si simples des éléments de ces formules les rendent très-commodes dans les applications.

La formule (5) diffère des autres en ce que l'expression de  $A_i$  est indépendante de la racine correspondante  $x_i$ ; nous allons voir tout de suite qu'elle est la seule qui, jouissant de cette propriété, donne à l'erreur  $\Delta$  la forme assignée.

4. Pour le faire voir, proposons-nous de résoudre directement la question suivante :

*Trouver la fonction  $f(x)$  qui, restant positive entre les limites  $-1$  et  $+1$  de la variable, donne*

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \varphi(x) dx = k \sum_{i=1}^{i=n} \varphi(x_i) + a_{2n} \varepsilon + a_{2n+1} \varepsilon' + \dots,$$

*k désignant une quantité indépendante de la forme de  $\varphi(x)$ , et*

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} + \dots$$

Supposant pour un moment  $\varphi(x) = 1$ , on aura

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = nk;$$

désignant la valeur de  $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$  par  $C$ , et introduisant la fonction  $f_1(x) = \frac{1}{C} f(x)$ , nous réduirons la question proposée à la détermination de  $f_1(x)$ , remplissant

la condition suivante :

$$(8) \quad \int_{-1}^{+1} f_1(x) \varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \varphi(x_i) + a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \dots$$

Mettons pour  $\varphi(x)$  la fonction  $\frac{1}{z-x}$ , et posons

$$F(z) = (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_n),$$

la formule (8) donnera

$$\int_{-1}^{+1} f_1(x) \frac{dx}{z-x} = \frac{F'(z)}{nF(z)} + \frac{\varepsilon}{z^{2n+1}} + \dots,$$

d'où il résulte immédiatement que la fraction irréductible  $\frac{F'(z)}{nF(z)}$  est la  $n^{ième}$  réduite de la fraction continue

$$\frac{1}{z + a + \frac{1}{\alpha z + \beta + \frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 + \dots}}} = \int_{-1}^{+1} \frac{f_1(x) dx}{z-x}.$$

Cherchons donc à déterminer les constantes inconnues  $\alpha, a, \beta, \alpha_1, \dots$ , de manière à vérifier la condition identique par rapport à  $z$

$$nP_n = Q'_n,$$

pour toute valeur entière et positive de  $n$ ,  $P_n$  et  $Q_n$  désignant, comme plus haut, le numérateur et le dénominateur de la  $n^{ième}$  réduite.

Calculant les réduites des trois premiers rangs, nous aurons

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, & P_2 &= \alpha z + \beta, & P_3 &= (\alpha_1 z + \beta_1)P_2 + P_1, \\ Q_1 &= z + a, & Q_2 &= \alpha z^2 + (\alpha a + \beta)z + a\beta + 1, \\ & & Q_3 &= (\alpha_1 z + \beta_1)Q_2 + Q_1. \end{aligned}$$

La condition  $2P_2 = Q'_2$  donne

$$2\alpha z + \beta = 2\alpha z + a\alpha + \beta,$$

d'où

$$\beta = a\alpha$$

et, par suite,

$$P_2 = \alpha(z + a), \quad Q_2 = \alpha z^2 + 2a\alpha z + a^2\alpha + 1,$$

$$P_3 = \alpha\alpha_1 z^2 + \alpha(\beta_1 + a\alpha_1)z + a\alpha\beta_1 + 1,$$

et enfin

$$Q_3 = \alpha\alpha_1 z^3 + \alpha(\beta_1 + 2a\alpha_1)z^2 + (a^2\alpha\alpha_1 + 2a\alpha\beta_1 + 1)z + a^2\alpha\beta_1 + a.$$

La condition  $3P_3 = Q'_3$  fournit deux équations

$$3(\beta_1 + a\alpha_1) = 2(\beta_1 + 2a\alpha_1), \quad 3(a\alpha\beta_1 + 1) = a^2\alpha\alpha_1 + 2a\alpha\beta_1 + 1,$$

d'où

$$\beta_1 = a\alpha_1, \quad \alpha_1 = 2;$$

ainsi l'on aura, en posant  $P_0 = 0$ ,  $Q_0 = 1$ , les relations

$$P_2 = \alpha(z + a)P_1 + P_0, \quad Q_2 = \alpha(z + a)Q_1 + Q_0,$$

$$P_3 = 2(z + a)P_2 - P_1, \quad Q_3 = 2(z + a)Q_2 - Q_1.$$

Il est facile de voir que, en poursuivant de la même manière, on aura généralement

$$\beta_k = a\alpha_k, \quad \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \dots = 2, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \dots = a,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9) \quad \begin{cases} Q_{2m} = 2(z + a)Q_{2m-1} + Q_{2m-2}, \\ Q_{2m+1} = 2(z - a)Q_{2m} - Q_{2m-1}. \end{cases}$$

En effet, ayant

$$Q_n = (\alpha_{n-2} z + \beta_{n-2}) Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

et supposant que

$$Q'_{n-1} = (n-1)P_{n-1}, \quad Q'_{n-2} = (n-2)P_{n-2},$$

on aura

$$Q'_n = \alpha_{n-2} Q_{n-1} + (\alpha_{n-2} z + \beta_{n-2}) Q'_{n-1} + Q'_{n-2},$$

ou

$$Q'_n = \alpha_{n-2} Q_{n-1} + (n-1)(\alpha_{n-2} z + \beta_{n-2}) P_{n-1} + (n-2) P_{n-2}.$$

Pour calculer  $\alpha_{n-2}$  et  $\beta_{n-2}$ , on prendra la relation  $n P_n = Q'_n$ , qui se réduit, en vertu de la précédente, à

$$(10) \quad \alpha_{n-2} Q_{n-1} = (\alpha_{n-2} z + \beta_{n-2}) P_{n-1} + 2 P_{n-2}.$$

Le nombre  $n$  étant  $\geq 3$ , la comparaison des coefficients de  $z^{n-2}$  et  $z^{n-3}$  dans les deux membres de la relation (10) fournira deux équations, qui ne peuvent être identiques par rapport à  $\alpha_{n-2}$  et  $\beta_{n-2}$ , vu que les coefficients de  $z^{n-2}$  dans  $P_{n-1}$  et de  $z^{n-3}$  dans  $P_{n-2}$  ne sont pas nuls. Donc les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont les seules qui restent arbitraires.

Il nous reste à montrer que les relations supposées, savoir les formules (9), entraînent comme conséquence nécessaire l'identité  $n P_n = Q'_n$ , pour toute valeur entière et positive de  $n$ .

Ayant vérifié, par ce qui précède, l'exactitude de la formule (11) pour  $n = 2$  et  $n = 3$ , nous la supposons vraie pour  $n = 2m$  et  $n = 2m + 1$ , et nous allons voir qu'elle le sera aussi pour  $n = 2m + 2$  et  $n = 2m + 3$ .

En effet, en vertu de (9), la formule (10) donne

$$\alpha Q_{2m+1} = \alpha (z + \alpha) P_{2m+1} + 2 P_{2m} = P_{2m+2} + P_{2m},$$

$$2 Q_{2m} = 2 (z + \alpha) P_{2m} + 2 P_{2m-1} = P_{2m+1} + P_{2m-1}.$$

Or

$$Q_{2m+2} = 2 (z + \alpha) Q_{2m+1} + Q_{2m},$$

donc

$$Q'_{2m+2} = \alpha Q_{2m+1} + \alpha (z + \alpha) Q'_{2m+1} + Q'_{2m},$$

ou

$$\begin{aligned} Q'_{2m+2} &= \alpha Q_{2m+1} + x(z+a)(2m+1)P_{2m+1} + 2mP_{2m} \\ &= (2m+2)P_{2m+2}. \end{aligned}$$

Absolument de la même manière, on trouverait

$$Q'_{2m+3} = (2m+3)P_{2m+3}.$$

Ainsi il est démontré que la condition identique (11) n'est vérifiée que pour la fraction continue de la forme

$$u = \frac{1}{z+a + \frac{1}{\alpha(z+a) + \frac{1}{2(z+a) + \frac{1}{\alpha(z+a) + \frac{1}{2(z+a) + \dots}}}}}$$

Soit  $v$  la fraction périodique

$$v = \frac{1}{\alpha(z+a) + \frac{1}{2(z+a) + \frac{1}{\alpha(z+a) + \dots}}}$$

on aura

$$v = \frac{1}{\alpha(z+a) + \frac{1}{2(z+a) + v}},$$

d'où

$$v = -(z+a) + \sqrt{(z+a)^2 + \frac{2}{\alpha}}$$

et enfin

$$u = \frac{1}{z+a+v} = \frac{1}{\sqrt{(z+a)^2 + \frac{2}{\alpha}}}.$$

Posant, pour abréger,

$$a_1 = -a - \sqrt{\frac{-2}{\alpha}}, \quad a_2 = -a + \sqrt{\frac{-2}{\alpha}},$$

on a

$$u = \frac{1}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)}}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)}} = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{(x - a_1)(a_2 - x)(z - x)}}.$$

Donc, si l'on fait

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{(z - x) \sqrt{(x - a_1)(x - a_2)}} = \int_{-1}^{+1} \frac{f_1(x) dx}{z - x},$$

on conclut nécessairement que

$$a_1 = -1, \quad a_2 = +1,$$

d'où

$$a = 0, \quad \alpha = -2$$

et

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

car autrement on pourrait assigner à  $z$  une valeur qui ne rendrait pas infinis simultanément les deux membres de l'égalité précédente.

La forme générale de la fonction cherchée  $f(x)$  est donc

$$f(x) = \frac{C}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$C$  étant une constante.

On voit, d'après cela, qu'on ne saurait trouver une formule des quadratures, à coefficients égaux, différente de la formule (5), en assignant à l'erreur  $\Delta$  la forme

$$a_{2n} \varepsilon + a_{2n+1} \varepsilon' + \dots$$


---